Chapitre 2

Espaces vectoriels de dimension finie

2.1 Dimension

Définition 2.1 *On appelle espace vectoriel de dimension finie tout espace vectoriel admettant une famille génératrice finie. Sinon, l'espace est dit de dimension infinie.*

Le théorème suivant affirme que tout espace vectoriel de dimension finie possède une base.

Théorème 2.1 *(Base incomplète) Soit E un espace vectoriel non nul de dimension finie sur K. Soit G une famille génératrice finie de E, et soit $L \subset G$ une sous famille libre. Il existe une base B de E telle que $L \subset B \subset G$.*

Corollaire 2.1 *Sous les hypothèses du théorème, il existe toujours $B \subset G$ qui soit une base de E.*

Corollaire 2.2 *Soit $(e_1, \ldots, e_k)$ une famille libre de vecteurs d'un espace vectoriel de dimension finie E. Il existe des vecteurs $e_{k+1}, \ldots, e_n$ tels que $e_1, \ldots, e_n$ est une base de E.*

Preuve. Il suffit pour le voir d'appliquer le théorème de la base incomplète aux familles $L = \{e_1, \ldots, e_k\}$ et $L \cup G$, où G est une famille génératrice quelconque de E.

Preuve du théorème de la base incomplète. On construit à partir de L une suite strictement croissante de familles libres de E.
Traitons d'abord le cas où L est réduite à un vecteur u_1, ce qui permet de construite une base en partant d'un des vecteurs générateurs. Supposons construite une partie libre $L_k = \{u_1, \ldots, u_k\} \subset G$ avec $k \geq 1$ (c'est vérifié pour $k = 1$. Si L_k est génératrice, on a fini. Sinon, il existe $u_{k+1} \in G$ tel que $u_{k+1} \notin \mathrm{Vect}(L_k)$. Autrement, puisque l'on pourrait exprimer chaque $u \in G$ comme combinaison linéaire d'éléments de L_k, il en irait de même de toutes les combinaisons linéaires d'éléments de G, i.e. de tous les vecteurs, donc L_k serait génératrice. Donc $L_{k+1} = L_k \cup \{u_{k+1}\}$ est une partie libre incluse dans G. On construit ainsi une suite strictement croissante de parties libres tant que L_k n'engendre pas E. Le processus s'arrête en temps fini puisque $L_k \subset G$ et G est fini. Il exists donc $k_0 \leq \#G$ tel que $L = L_1 \subset L_{k_0} \subset G$ et L_{k_0} soit libre et génératrice.
Si l'on part d'une famille libre $L = \{u_1, \ldots, u_{k_0}\} \subset G$ quelconque, on procède de la même façon. si L est déjà génératrice, il n'y a rien à faire. Sinon on complète par récurrence.

Théorème et définition 2.1 *Soit E un espace vectoriel non nul de dimension finie sur K. Toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments. Ce nombre est appelé la dimension de E et est noté en général* $\dim_K E$. *Si $E = \{0\}$, on convient que* $\dim_K E = 0$.

Par convention, la dimension d'un espace vectoriel réduit au vecteur nul est égale à 0.
Preuve : (1) Cas des petits nombres.
(a) Il existe une base à un élément e. Alors, si $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$ est une autre base, tous les ε_i s'écrivent $\varepsilon_i = \lambda_i e$ avec $\lambda_i \neq 0$. Donc si $p \geq 2$, ε_1 et ε_2 sont liés, contradiction.
(b) Il existe une base à deux élément (e_1, e_2). Alors, si $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$ est une autre base, tous les ε_i s'écrivent $\varepsilon_i = \lambda_{i,1} e_1 + \lambda_{i,2} e_2$ avec $\lambda_{i,1}, \lambda_{i,2} \in \mathbb{K}$ et au moins l'une des deux coordonnées non nulle. Supposons $p \geq 3$.

Comme $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est libre, les vecteurs coordonnées $\begin{pmatrix}\lambda_{1,1}\\ \lambda_{1,2}\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}\lambda_{2,1}\\ \lambda_{2,2}\end{pmatrix}$ ne sont pas liés. Ceci implique que e_1 et e_2 sont engendrés par ε_1 et ε_2, il en va donc de même de ε_3. Contradiction. Donc $p \leq 2$. Mais si $p = 1$, alors d'après le (a) les vecteurs e_1 et e_2 doivent être liés ; nouvelle contradiction. Ainsi $p = 2$.

(2) Cas général. On raisonne par récurrence sur $n \geq 1$ pour montrer que dans tout espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0\}$, si l'on a deux bases $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$ telles que $p \geq n$, alors on a $n = p$.
Le cas $n = 1$ est clair. Supposons le résultat vrai pour $n - 1$ avec $n \geq 2$. Soit E un espace vectoriel et deux familles libres $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$ avec $p \geq n$ et $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p) = E$.
(1) Il existe e_i tel que $(e_i, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p)$ soit libre et forme une base de E. En effet, si tous les e_i sont engendrés par $\varepsilon_2, \ldots \varepsilon_p$, il en est de même de ε_1. Contradiction.
$(e_i, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p)$ engendre alors ε_1, sinon, on pourrait former la famille libre $(e_i, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p)$. Or e_i est engendré par les ε_j.
(2) Appelons $\lambda_{k,i}$ la composante de chaque ε_k sur e_i. On a que $(e_i, \varepsilon_k - \lambda_{k,i}e_i : 2 \leq k \leq p)$ est une base de E.
On voit aussi que $(\varepsilon_k - \lambda_{k,i}e_i : 2 \leq k \leq p)$ et $(e_j : j \neq i)$ sont des bases de $\mathrm{Vect}(e_j : j \neq i)$.
En effet, $(\varepsilon_k - \lambda_{k,i}e_i : 2 \leq k \leq p)$ est libre et contenue dans $\mathrm{Vect}(e_j : j \neq i)$. De plus $(\varepsilon_k - \lambda_{k,i}e_i : 2 \leq k \leq p)$ engendre $\mathrm{Vect}(e_j : j \neq i)$, sinon $(e_i, \varepsilon_k - \lambda_{k,i}e_i : 2 \leq k \leq p)$ ne pourraît être une base de E. Donc, par hypothèse de récurrence on a $n - 1 = p - 1$, d'où $n = p$.

Théorème 2.2 *Dans un espace vectoriel de dimension n, toute famille de plus de n vecteurs est liée (et toute famille libre a au plus n vecteurs).*

Corollaire 2.3 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, et soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille de n vecteurs. On a équivalence entre :*

1. *$(v_1, \ldots, v_n)$ est une base de E,*
2. *$(v_1, \ldots, v_n)$ est une famille libre,*
3. *$(v_1, \ldots, v_n)$ est une famille génératrice.*

Exercice 2.1 –

1- Quelle est la dimension de $\mathbb{C}$ espace vectoriel sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$?

2- Quelle est la dimension de K^n ?

2- Quelle est la dimension de $\mathbb{C}_n[X]$ sur $\mathbb{R}$? Sur $\mathbb{C}$

2- Quelle est la dimension de $E \times F$? (détailler)

2.2 Sous-espaces vectoriels

Proposition 2.1 *Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E. Alors, F est de dimension finie, et* $\dim(F) \leq \dim(E)$. *De plus, on a* $\dim(F) = \dim(E) \iff F = E$.

Preuve. F ne peut contenir de famille libre infinie, sinon il en irait de même de E, qui contiendrait alors des sous-espaces des familles libres de cardinal supérieur à sa dimension. En appliquant le corollaire 2.2, on aurait alors une contradiction. On voit alors que F est de dimension finie, et que toute base de F peut être complétée en une base de E, donc $\dim(F) = \dim(E) \iff F = E$.

Exemple 2.1 *Les droites, les plans, les hyperplans.*

Proposition 2.2 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur K.Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Tout sous-espace vectoriel F de E admet au moins un supplémentaire G dans E et*

$$E = F \oplus G \Rightarrow \dim(E) = \dim(F) + \dim(G).$$

Si F et G sont deux sous-espaces de E en somme directe, i.e. $F \oplus G$, alors $\dim F + G = \dim(F) + \dim(G)$. *Plus généralement, si les E_k sont des sev de E en somme directe, $\oplus_{i=1}^{k} E_k$, alors* $\dim \oplus_{i=1}^{k} E_k = \sum_{i=1}^{k} \dim E_k$.

Exercice 2.2 – Dans $\mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace F engendré par (a, b, c) et le sous-espace G engendré par (d, e).

$$a = (1, 2, 3, 4),\ b = (1, 1, 1, 3),\ c = (0, 1, 2, 2),\ d = (1, 0, -1, 2),\ e = (2, 3, 0, 1)$$

Déterminer les dimensions de $F, G, F \cap G, F + G$ et des bases de ces sous-espaces, et des représentations cartésiennes (on cherchera d'abord une base de $F \cap G$).

Définition 2.2 (Rang d'un système de vecteurs) *On appelle rang d'un système de vecteurs S la dimension du sous-espace vectoriel, supposé de dimension finie, engendré par ce système.*

C'est donc le nombre maximal de vecteurs indépendants dans S. Notons n la dimension de E.
On donnera plus tard une méthode systématique de calcul du rang.