Chapitre 1

Espaces vectoriels

1.1 Structure d'espace vectoriel

On se place pour le moment dans un cadre abstrait qui couvre beaucoup de situations déjà rencontrées.

Définition 1.1 *Soit $K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ (K est un corps). Un* ***espace vectoriel*** *sur K, ou K-espace vectoriel, est un ensemble E non vide, muni d'une loi de composition interne, appelée addition et notée $+$ qui en fait un groupe commutatif (ou abélien), i.e.*
(addition) $+ : x, y \in E \mapsto x + y \in E$ munie des propriétés :

1. *(associativité de $+$) $\forall x, y, z \in E,\ (x + y) + z = x + (y + z)$;*
2. *(élément neutre pour $+$) : il existe un vecteur noté 0_E, ou simplement 0, tel que $\forall x \in E, \quad x + 0 = 0 + x = x$; ce vecteur s'appelle le vecteur nul;*
3. *(existence d'un inverse, ou symétrique) : $\forall x \in E, \exists y \in E, \quad x + y = y + x = 0$; un tel y est unique et se note $-x$.*
4. *(commutativité de $+$) : $\forall x, y \in E,\ x + y = y + x$;*

et d'une multiplication externe
(multiplication) $\cdot$: $(\lambda, x) \in K \times E \mapsto \lambda \cdot x \in E$, aussi noté λx, munie des propriétés :

1. *(élément neutre pour $\cdot$) $\forall x \in E,\ 1 \cdot x = x$;*
2. *(associativité de $\cdot$) $\forall x \in E, \forall \lambda, \mu \in K,\ \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$;*
3. *(distributivité de $\cdot$ par rapport à $+$) $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in K,\ \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;*
4. *(distributivité de $\cdot$ par rapport à $+_K$) $\forall x \in E, \forall \lambda, \mu \in K,\ (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$.*

Les éléments de K sont appelés scalaires, et les éléments de E vecteurs.

Remarque 1.1 *On a toujours $0 \cdot x = 0_E$ et $(-1) \cdot x = -x$ pour tout $x \in E$. On a aussi $\lambda \cdot 0_E = 0_E$ et $\lambda \cdot x = 0_E$ si et seulement si $\lambda = 0$ ou $x = 0_E$.*

Exemple 1.1

1. *K est un espace vectoriel sur lui-même.*
2. *L'ensemble des vecteurs de la géométrie euclidienne en dimension 2 et 3, notés $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.*
3. *$\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$.*
4. *L'ensemble des applications définies sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$.*
5. *L'ensemble des fonctions continues sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.*
6. *L'ensemble des polynômes à une indéterminée à coefficients dans K.*
7. *Les suites d'éléments de K.*
8. *Les suites convergentes d'éléments de K.*
9. *Les suites d'éléments de K convergeant vers 0 .*

Définition 1.2 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur $K = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On définit* ***le produit cartésien*** *$E \times F$ comme l'ensemble des couples (x, y) où x décrit E et y décrit F. Il peut être muni d'une structure d'espace vectoriel, appelé* ***l'espace vectoriel produit*** *:*

1. $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$,
2. $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$

On peut faire aisément de même avec un nombre fini quelconque d'espaces et en déduire notamment la construction de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ comme espaces produits.

1.2 Sous-espaces vectoriels

Définition 1.3 *Soit E un espace vectoriel sur un corps K. Une partie non vide F de E est sous-espace vectoriel de E si c'est un espace vectoriel sur K pour les opérations $+$ et $\cdot$ induites sur F.*

Théorème 1.1 *Une partie non vide F de E est sous-espace vectoriel de E si et seulement si elle vérifie :*

1. $\forall (x, y) \in F \times F,\ x + y \in F$,
2. $\forall \lambda \in K, \forall x \in F,\ \lambda \cdot x \in F$.

Exemple 1.2

1. *Dans le plan $\mathbb{R}^2$, les droites passant par $(0, 0)$ sont des sous-espaces vectoriels. Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, les droites et les plans passant par $(0, 0, 0)$ sont des sous-espaces vectoriels.*
2. *E =l'espace des suites d'éléments de K, F=l'espace des suites convergentes d'éléments de K, G =l'espace des suites convergeant vers 0 d'éléments de K. G est un sous-espace de F, qui est un sous-espace de E.*
3. *L'ensemble des fonctions réelles dérivables sur $[0, 1]$ est un sous-espace vectoriel de $C([0, 1], \mathbb{R})$.*
4. *$\{f \in C([0, 1], \mathbb{R}) : f(1/2) = 0\}$, $\{f \in C([0, 1], \mathbb{R}) : \int_0^1 f(t)\, dt = 0\}$ sont des sous espaces vectoriels de $C([0, 1], \mathbb{R})$.*
5. *$\{f \in C([0, 1], \mathbb{R}) : f(1/2) = 1\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel.*

Exemple 1.3

1. *L'intersection d'un nombre quelconque de sous-espaces vectoriels est un espace vectoriel.*
2. *Qu'en est-il de la réunion de sous-espaces vectoriels ?*
3. *Soit n un entier supérieur ou égal à 2, et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des éléments de K. Alors l'ensemble des vecteurs $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de K^n tels que $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$ est un sous-espace vectoriel de K^n. On le verra comme le noyau de l'application linéaire $L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$, appelée forme linéaire.*
4. *L'ensemble des vecteurs $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ de K^p solution du système d'equations linéaires*

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = 0, \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = 0 \end{cases}$$

est un sous-espace vectoriel de K^p puisque c'est une intersection de sous-espaces vectoriels. Une telle représentation est dite représentation cartésienne. Par exemple dans $\mathbb{R}^3$, l'intersection de deux plans vectoriels prend, comme on le sait, la forme

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0, \\ a'x + b'y + c'z = 0 = 0 \end{cases}.$$

Ces deux plans sont confondus si les vecteurs $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ sont colinéaires, et sintersectent sinon.

Anticipant un peu sur la définition suivante, disons qu'il est toujours possible de passer d'une représentation cartésienne à une représentation paramétrique, opération qui prend la forme suivante dans le cas particulier de l'intersection de deux plans vectoriels : expliquer.

Définition 1.4 *On appelle **combinaison linéaire** d'une famille $(x_i)_{I\in I}$ d'éléments de E tout élément x de la forme $\sum_{i\in I}\lambda_i x_i$, où les λ_i sont dans $\mathbb{K}$ et $\{i\in I:\ \lambda_i\neq 0\}$ est fini. On note* $\mathrm{Vect}(A)$ *cet ensemble.*

Définition 1.5 (Espace engendré par une partie non vide A de E) *Soit A une partie non vide de l'epace vectoriel E sur $\mathbb{K}$. L'space engendré par A est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A, i.e. l'ensemble des vecteurs x de la forme $\sum_{i\in I}\lambda_i x_i$, où I est un ensemble fini, les x_i sont des vecteurs de E, et les λ_i des scalaires.*

Théorème 1.2 *L'espace engendré par A est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A :*

$$\mathrm{Vect}(A)=\bigcap_{\substack{F \text{ sev de } E\\ A\subset F}} F.$$

Démonstration $\mathrm{Vect}(A)$ est évidemmment un sous-espace vectoriel de E contenant A. Soit F un autre sous-espace vectoriel contenant A, il en contient toutes les combinaisons linéaires, donc il contient $\mathrm{Vect}(A)$. On dit que A est une *partie génératrice* de F. ■

Définition 1.6 *L'espace vectoriel engendré par une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de E est l'ensemble*

$$F=\left\{\sum_{i\in I}\lambda_i x_i,(\lambda_i)\in K^I\right\}.$$

*On dit que $(x_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de F. Si l'espace vectoriel E lui-même est engendré par un nombre **fini** de ses éléments, on dit que E est de dimension finie.*

Exemple 1.4 *(1) Dans $\mathbb{R}^2$, $A=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$ et $A_1=\left\{\begin{pmatrix}-8\\0\end{pmatrix}\right\}$ engendrent la droite vectorielle d'équation $y=0$; $A'=\left\{\begin{pmatrix}-3\\-6\end{pmatrix}\right\}$ et $A'_1=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\-6\end{pmatrix}\right\}$ engendrent la droite vectorielle $y-2x=0$; et $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ et $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\-5\end{pmatrix}\right\}$ engendrent $\mathbb{R}^2$.*

La base canonique de $\mathbb{R}^n$ engendre $\mathbb{R}^n$.

(2) Les polynômes 1, X, et X^2 engendrent l'espace vecotiel des polynômes de degré ≤ 2.

(3) Dans l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, le sous-espace engendré par les fonctions

$$t\mapsto \sin nt,\quad t\mapsto\cos nt, n\in\mathbb{N},$$

est le sous-espace des polynômes trigonométriques.

Somme de sous-espaces vectoriels.

Définition 1.7 *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E sur K. On définit*

$$F+G=\{x+y,\ (x,y)\in F\times G\}.$$

Propriétés 1.1

1. *La somme de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.*
2. *Si F est engendré par la famille des $x_i, i\in I$ et G par la famille des $y_j, j\in J$, alors $F+G$ est engendré par la réunion des deux familles.*
3. *Soient A et B deux parties de E. Alors :*

$$Vect(A)+Vect(B)=Vect(A\cup B).$$

Exercice 1.1 Déterminer $E+F$ dans les deux cas suivants :
(1) $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = a + bx^2, a, b \in \mathbb{R}\}$ et $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = cx,\ c \in \mathbb{R}\}\}$. On donnera aussi des familles génératrices de E et F.
(2) E est un sous-espace vectoriel de F.

Exercice 1.2

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}, \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = 0\}$$

Trouver une famille génératrice de F, de G, de $F+G$. Déterminer $F+G$, $F \cap G$.

Définition 1.8 (Somme directe de sous-espaces vectoriels) *La somme de deux sous-espaces vectoriels F et G de E est directe si tout élément de la somme se décompose de manière unique sur F et G.*
La somme de p sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_p$ de E est directe si tout vecteur de $F_1 + \ldots + F_p$ s'écrit de manière unique comme somme d'éléments de F_k, $1 \leq k \leq p$:

$$\forall (x_1, \ldots, x_p),\ (y_1 \cdots, \ldots y_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p, x_1 + \cdots + x_p = y_1 + \cdots + y_p \Rightarrow x_i = y_i \ \forall\ 1 \leq i \leq k$$

ou encore

$$\forall (x_1, \ldots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p, x_1 + \cdots + x_p = 0 \Rightarrow x_i = 0 \ \forall\ 1 \leq i \leq k.$$

Théorème 1.3 *Les sous-espaces F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$.*

Théorème 1.4 *Soit p sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_p$ de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(1) $\oplus_{i=1}^p F_i$;
(2) Pour toute partition de $\{1, \ldots, p\}$ en deux parties complémentaires I et J, on a $\oplus_{i \in I} F_i$, $\oplus_{j \in J} F_j$, et $(\oplus_{i \in I} F_i) \oplus (\oplus_{j \in J} F_j)$.
On a adpoté la convention $\oplus_{i \in \emptyset} = \{0\}$.

Preuve. (2) implique clairement (1). Supposons (1) vrai. Il découle de la définition que $\oplus_{i \in I} F_i$ pour tout $I \subset \{1, \ldots, p\}$. Si $\{I, J\}$ est une partition de $\{1, \ldots, p\}$, soit $x \in (\oplus_{i \in I} F_i) \cap (\oplus_{j \in J} F_j)$. On peut écrire $x = \sum_{i \in I} x_i = \sum_{j \in J} x_j$, avec $x_i \in F_i$ et $x_j \in F_j$ pour tous $i \in I$ et $j \in J$. On a donc $\sum_{i \in I} x_i - \sum_{j \in J} x_j = 0 = \sum_{i \in I \cup J} 0$. Comme $\oplus_{i=1}^p F_i$, on en déduit que les x_i et les x_j, $i \in I$, $j \in J$ sont tous nuls, et donc $x = 0$.

Exercice 1.3
1. *Les sous-espaces vectoriels F et G de l'exercice précédent sont-ils en somme directe ?*
2. *Dans $\mathbb{R}^3$ montrer que les sous-espaces vectoriels*

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0, x = 0\}, \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = 0\}$$

   sont en somme directe.

Exercice 1.4
1. *Donner trois façons d'écrire $\mathbb{R}_2[X]$ comme somme directe de 2 sous-espaces vectoriels non triviaux.*
2. *Donner six façons d'écrire $\mathbb{R}_3[X]$ comme somme directe de 3 sous-espaces vectoriels non triviaux.*
3. *Donner dix façons d'écrire $\mathbb{R}_3[X]$ comme somme directe de 2 sous-espaces vectoriels non triviaux.*

Définition 1.9 (Espaces supplémentaires) *Les sous-espaces F et G de E sont supplémentaires si $E = F \oplus G$.*

Par l'axiome du choix, tout sous-espace vectoriel a un supplémentaire. Mais il n'est pas unique si le sous espace est strict.

Exemple 1.5
1. *Représenter $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ à l'aide de sous-espaces supplémentaires.*
2. *$\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$.*
3. *$E \times F = E \times \{0\} \oplus \{0\} \times F$.*

4. *Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace de toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{F}_a$ le sous-espace des fonctions nulles au point a, et $\mathcal{F}_C$ le sous-espace des fonctions constantes. Montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathcal{F}_a \oplus \mathcal{F}_C$.*

Exercice 1.5 *Les sous-espaces vectoriels*

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+y+z=0, x=0\}, \quad G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, z=0\}$$

sont-ils supplémentaires ?

Exercice 1.6 – Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1- On considère les sous-espaces vectoriels suivants de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$: $U = \mathrm{Vect}(1, \cos 2x, \cos 4x)$, $V = \mathrm{Vect}(1, \cos^2 x)$ et $W = \mathrm{Vect}(\cos^4 x)$. Montrer que $U = V \oplus W$.

2- Soit $P = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f \text{ paire}\}$ et $I = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f \text{ impaire}\}$. Montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = P \oplus I$.
.

Exercice 1.7 – Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P'(1) = 0\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid \deg P \leq 1\}$.

1- Montrer que $\mathbb{R}_3[X] = F \oplus G$.

2- Donner une méthode pour trouver la décomposition de tout polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ suivant cette somme directe.

1.3 Familles libres, familles génératrices, bases

Définition 1.10 *Soit $\{u_i\}_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. Elle est dite* ***génératrice*** *si le sous-espace vectoriel engendré par les u_i est E tout entier, c'est-à-dire si tout vecteur de E est combinaison linéaire finie des u_i. Elle est dite* ***libre*** *si toute sous-famille finie $\{u_i\}_{i\in I'}$ de $\{u_i\}_{i\in I}$ est libre, i.e. il n'existe pas de combinaison linéaire des u_i, $i \in I'$, à coefficients non nuls qui soit nulle. On dit aussi que les u_i, $i \in I$, sont* ***linéairement indépendants****. En particulier, les vecteurs u_i sont tous non nuls.*
Une famille qui n'est pas libre est dite ***liée****, et ses éléments sont dits linéairement dépendants.*

Remarque 1.2 *Pour savoir si une famille $(u_1, \ldots, u_p) \in \mathbb{R}^n$ est génératrice, on résout l'équation d'inconnue (λ_1, λ_p), $\sum_{i=1}^p \lambda_i u_i = x$, pour tout x de $\mathbb{R}^n$. Si la famille n'est pas génératrice, l'équation n'a pas toujours de solution, et la CNS sur x sous laquelle il y en a fournit une représentation cartésienne de $\mathrm{Vect}(\{u_i\})$.*

Remarque 1.3 *Ainsi, $\{u_i\}_{i\in I}$ est libre si et seulement si*

$$\forall J \textit{finie}, J \subset I, \sum_{i\in J} \lambda_i a_i = 0 \;\Rightarrow\; \forall i \in J,\ \lambda_i = 0.$$

Si I est fini, et les vecteurs u_i sont tous non nuls, il revient au même de dire que les espaces vectoriels $\mathrm{Vect}(u_i)$, $i \in I$, sont en somme directe :

$$\{u_i : i \in I\} \textit{ est libre si et seulement si } \mathrm{Vect}(\{u_i : i \in I\}) = \oplus_{i\in I}\mathrm{Vect}(\{u_i\}).$$

Si $\{u_i\}_{i\in I}$ est libre, alors, pour tout vecteur de E qui est combinaison linéaire des u_i, il existe une unique famille de coefficients $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ telle que $x = \sum_{i\in I} \lambda_i u_i$. Cette famille permet de définir l'application qui à un vecteur de $\mathrm{Vect}(\{u_i : i \in I\}$ associe ses coordonnées dans la famille $\{u_i\}_{i\in I}$. C'est une bijection de $\mathrm{Vect}(\{u_i : i \in I\}$ sur $\mathbb{K}^I$.

Exemple 1.6 1. *Dans $\mathbb{R}^2$ les vecteurs $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ forment une famille libre.*

2. *Dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ forment une famille libre. Les vecteurs $e_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ forment une famille liée.*

3. *Dans* $\mathbb{R}^2[X]$ *les polynômes* 1 *et* x *forment une famille libre, les polynômes* 1, x, $2x+3$ *forment une famille liée.*

Théorème 1.5 *Une famille est liée si et seulement si un de ses éléments est combinaison linéaire finie des autres.*

Définition 1.11 *On appelle base de* E *toute famille libre et génératrice de vecteurs de* E.

Théorème 1.6 *Si* $\mathcal{B}$ *est une base de* E*, alors tout vecteur de* E *s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de* $\mathcal{B}$*. Si* $\mathcal{B}$ *est finie et* $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_p\}$*, alors*

$$E = \oplus_{i=1}^{p} \mathrm{Vect}(\{u_i\}).$$

Ainsi, une fois qu'on s'est donné une base de E, un vecteur est entièrement déterminé par la donnée de ses coordonnées.

Exemple 1.7 $\{1, X, \ldots, X^n\}$ *forme une base de* $\mathbb{R}^n[X]$*. Qu'en est-il de* $\{1, (X-a_1), (X-a_1)(X-a_2), \ldots, (X-a_1)\cdots(X-a_n)\}$*. Même question pour* $\mathbb{R}[X]$.