Chapitre 3

Homomorphismes d'espaces vectoriels.

Ou applications linéaires.

3.1 Définitions et exemples

Définition 3.1 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur un même corps commutatif K . Une* ***application linéaire*** *(ou* ***homomorphisme****) de E dans F est une application u de E dans F telle que*

1. $\forall (x, y) \in E^2,\ u(x + y) = u(x) + u(y)$,
2. $\forall x \in E, \forall \lambda \in K,\ u(\lambda x) = \lambda u(x)$,

Si $F = E$, on dit que u est un endomorphisme de E. Si $F = K$, on dit que u est une forme linéaire sur E. Un isomorphisme est une application linéaire bijective. Un automorphisme est un endomorphisme bijectif.
L'ensemble des application linéaires de E dans F se note $\mathcal{L}(E, F)$; il est naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel.

Remarque 3.1 *Si u est un isomorphisme, u^{-1} en est également un.*

Remarque 3.2 *Un homomorphisme est entièrement déterminé par sa donnée sur une famille génératrice. On peut ainsi représenter aisément u si l'on connaît une base de l'espace de départ et une base de l'espace d'arrivée. Prendre l'exemple de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.*

Propriétés 3.1
1. *Le composé de deux homomorphismes est un homomorphisme.*
2. *L'image d'un sous-espace vectoriel est un sous-espace vectoriel, l'image réciproque d'un sous-espace vectoriel est un sous-espace vectoriel.*

Théorème 3.1
1. *Si u est un homomorphisme de E dans F, l'ensemble des éléments x de E tels que $u(x) = 0$ est un sous-espace vectoriel de E, appelé le noyau de u, et noté* $\operatorname{Ker} u$.
2. *Si u est un homomorphisme de E dans F, l'ensemble des éléments $u(x)$ pour $x \in E$ est un sous-espace vectoriel de F, appelé l' image de u, et noté* $\operatorname{Im} u$.

Exemple 3.1
1. *Des exemples de la géométrie : l'identité et plus généralement toutes les homothéties vectorielles (non nulles) sont des automorphismes. Les symétries, rotations et similitudes vectorielles (non nulles) sont des automorphismes du plan ou de l'espace usuel.*
2. *Interpréter les hyperplans de $\mathbb{R}^n$ et leurs intersections comme des noyaux.*
3. *Définir une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ à l'aide des bases canoniques.*
4. *Dérivation d'une fonction. Trouver ses noyau et image.*
5. *Translation : à $x \mapsto f(x)$ fait correspondre $x \mapsto f(x + 1)$.*
6. *Intégrale d'une fonction sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.*

7. *$f \mapsto f(a)$. Trouver ses noyau et image.*
8. *Soit A un polynôme réel non nul. Montrer que l'application qui a un polynôme fait correspondre le reste de la division euclidienne par A est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$. Trouver ses noyaux et image.*

Exercice 3.1 *Soit $m, n \geq 1$. Alors, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ est de dimension nm. On commencera par des petite valeurs de m ou n.*

Proposition 3.1 *Un homomorphisme est injectif si et seulement si son noyau est réduit à zéro.*

3.2 Applications linéaires et familles de vecteurs

Théorème 3.2 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur K, u un homomorphisme de E sur F. On a les propriétés suivantes :*

1. *si B est une famille génératrice dans E, $u(B)$ est génératrice dans $u(E)$,*
2. *si B est une famille liée dans E, $u(B)$ est liée dans F,*
3. *si $u(B)$ est libre dans F, B est libre dans E.*

Attention l'image d'une famille libre n'est pas forcément libre.

Exercice 3.2 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur K, u un homomorphisme de E sur F. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *u injective,*
2. *pour toute famille libre B, $u(B)$ est libre,*
3. *Pour tous sous-espaces vectoriels F et G tels que $E = F \oplus G$, $u(E) = u(F) \oplus u(G)$.*

3.3 Le théorème d'isomorphisme

Proposition 3.2 *Soit u un homomorphisme d'un espace vectoriel E dans un espace F. Soit $E_1 = \operatorname{Ker} u$ et E_2 un supplémentaire de E_1 dans E. Alors u induit un isomorphisme de E_2 sur $\operatorname{Im} u$.*

Démonstration Par restriction l'application linéaire u induit une application linéaire $\tilde{u}\colon E_2 \to \operatorname{Im} u$. Son noyau est $\operatorname{Ker} \tilde{u} = \operatorname{Ker} u \cap E_2 = \{0\}$. De plus, $\tilde{u}$ est surjective. En effet, pour tout $y \in \operatorname{Im} u$, il existe $x \in E$ tel que $u(x) = y$. On peut décomposer x en $x = x_1 + x_2$, où $x_1 \in \operatorname{Ker} f$ et $x_2 \in E_2$. On a alors $y = u(x_2) = \tilde{u}(x_2)$. ■

Théorème 3.3 *Deux espaces de dimension finie E et F sont isomorphes si et seulement si ils ont même dimension.*

3.4 Rang d'une application linéaire

Dans tout ce qui suit, E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie sur le même corps K.

Théorème et définition 3.1 *Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Alors $f(E)$ est de dimension finie sur K et $\dim_K f(E) \leq \dim_K E$. On appelle rang de f la dimension de l'image de f, et on le note $\operatorname{rg} f$.*

Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, le rang de f est le rang du système de vecteurs $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$.

Théorème 3.4 *(théorème du rang) On a $\operatorname{rg}(f) = \dim(E) - \dim(\operatorname{Ker} f)$.*

Démonstration Soit E' un supplémentaire dans E de $\operatorname{Ker} f$. On a vu que f induit alors un isomorphisme entre $\operatorname{Im} f$ et E'. On a donc $\operatorname{rg}(f) = \dim(\operatorname{Im} f) = \dim(E) - \dim(\operatorname{Ker} f)$. ■

Remarque 3.3 (Lien avec le rang d'une famille de vecteurs) *Soit E un K-ev espace vectoriel de dimenion finie et $u_1, \dots u_p$ des vecteurs de E. Soit f l'application de K^p dans E définie par $f(\lambda_1, \dots, \lambda_p) = \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i$. C'est un homomorphisme. Le rang de $(u_1, \dots, u_p)$ est égal à $\mathrm{rg}\,(f)$. Donc trouver $rg(u_1, \dots, u_p)$ est équivalent à déterminer la dimension du noyau de f, ce qui revient à résoudre un système linéaire.*

Exemple 3.2 Les espaces suivants sont-ils isomorphes ? (1) $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^4$. (2) $\mathbb{R}_5[X]$ et $\mathbb{R}^5$. (3) $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$, $n, m \geq 1$.

Corollaire 3.1 *Soient E (de dimension n) et F (de dimension p) deux espaces vectoriels sur le même corps K.*

1. *$rgf \leq \inf(n, p)$,*
2. *$\mathrm{rg}\, f = n$ si et seulement si f est injective,*
3. *$\mathrm{rg}\, f = p$ si et seulement si f est surjective.*

En particulier si f est surjective, on a $p \leq n$.

Corollaire 3.2 *Soit $f : E \to F$ une application linéaire, et supposons que $\dim E = \dim F$. On a alors équivalence entre*

1. *f est injective,*
2. *f est surjective,*
3. *f est bijective.*

Exercice 3.3 – Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On a

$$\dim (F + G) = \dim (F) + \dim (G) - \dim (F \cap G).$$

Montrons le de deux façons.

1- On introduit F' et G' supplémentaires de $F \cap G$ respectivement dans F et G. Montrer que $F + G = F' \oplus G' \oplus F \cap G$.

2- Considérer l'application de $F \times G$ dans $F + G$, $(x, y) \mapsto x + y$. Montrer qu'elle est linéaire, déterminer son image et son noyau. Conclure.

3.5 Projections et symétries

Définition 3.2 *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, la projection p sur F parallèlement à G est définie comme suit : si x se décompose en $y + z$ où y est dans F et z dans G, alors $p(x) = y$.*

Prendre ici l'exemple trivial des droites portant la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Théorème 3.5 *La projection sur F parallèlement à G est un endomorphisme. Son noyau est G, son image est F.*

Définition 3.3 *Un projecteur est un endomorphisme idempotent, i.e. tel que $p \circ p = p$.*

Théorème 3.6 *Soit p un projecteur. Alors p est la projection sur $Im(p)$ parallèlement à $Ker(p)$.*

Définition 3.4 *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, la symétrie s par rapport à F parallèlement à G est définie comme suit : si x se décompose en $y + z$ où y est dans F et z dans G, alors $s(x) = y - z$.*

Prendre ici l'exemple trivial des droites portant la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Théorème 3.7 *La symétrie par rapport à F parallèlement à G est un isomorphisme.*

Définition 3.5 *Une involution est un endomorphisme s tel que $s \circ s = Id$.*

Théorème 3.8 *Soit s une involution. Alors s est la symétrie par rapport à $Ker(s-Id)$ parallèlement à $Ker(s+Id)$.*

Exercice 3.4 On travaille dans $\mathbb{R}^2$. Soit $D_1 = Vect\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)$ et $D_2 = Vect\left(\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right)$.
(1) Vérifier que D_1 et D_2 sont supplémentaires.
(2) Donner l'expression de la projection sur D_1 parrallèlement à D_2, et de la symétrie par rapport à D_1 parallèlement à D_2.
(3) Même question que (2) en échangeant les rôles de D_1 et D_2.

Exercice 3.5 – On considère dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, la droite vectorielle D engendrée par le vecteur $(-1, 1, 2)$, et l'ensemble $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y - z = 0\}$.

1- Montrer que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.

2- Déterminer l'expression de la projection sur P parallèlement à D. Faire de même pour la projection sur D parallèlement à P.

3- Déterminer l'expression de la symétrie par rapport à P parallèlement à D. Faire de même pour la symétrie par rapport à D parallèlement à P.

4- On adopte le point de vue inverse : à partir de l'expression analytique obtenue pour la projection sur P parallèlement à D, retrouver qu'il s'agit bien d'une projection.