Chapitre 5

Matrice d'une application linéaire. Changement de base

5.1 Matrice d'une application linéaire

Exemple 5.1 *Matrice de la symétrie d'axe la première bissectrice dans $\mathbb{R}^2$ dans deux systèmes d'axes différents.*

5.1.1 Définition

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, de dimensions respectives p et n. Soient $B = \{e_1, \dots, e_p\}$ une base de E et $C = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ une base de F.

Définition 5.1 *Soit f une application linéaire de E dans F. On appelle matrice de f, relativement aux bases B et C, et on note $A = Mat_{B,C}(f)$ la matrice dont les colonnes donnent les coordonnées de $f(e_1), \dots, f(e_p)$ dans la base C. Si $E = F$ et $B = C$, $Mat_{B,C}(f)$ est simplement notée $Mat_B(f)$*

Si $x = x_1e_1 + \cdots + x_pe_p$, on pose $X_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ (vecteur des coordonnées de x dans la base B). Alors $f(x) = y = y_1\varepsilon_1 + \cdots + y_n\varepsilon_n$, avec

$$Y_C = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = AX_B = Mat_{B,C}(f)X_B \text{ (vecteur des coordonnées de } y \text{ dans la base } C) .$$

Exemple 5.2 *Si $E = K^p$ et $F = K^n$, on définit naturellement les endomorphismes dans les bases canoniques B et C de E et F. Notons que ici, pour tout $x \in K^p$ on a $x = X_B$ et pour tout $y \in K^n$ on a $y = Y_C$. Dès que l'on a écrit $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} A_{i,j}\varepsilon_i$,*

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{p} x_jf(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{p} A_{i,j}x_j\Big)\varepsilon_i.$$

Donc, dans ce cas on a $f(x) = y = Y_C = AX_B = Ax$, ce qui donne $Mat_{B,C}(f) = A$ et $f = f_A$.

Remarque 5.1 *La matrice d'une application linéaire f dépend bien sûr du choix des bases. Ce choix étant fait, l'application linéaire est entièrement déterminée par sa matrice.*

Proposition 5.1 *L'application $f \in \mathcal{L}(E, F) \mapsto Mat_{B,C}(f) \in M_{n,p}(K)$ est un isomorphisme.*

5.1.2 Changement de base

Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ et $B' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases de E. La matrice de passage de B à B' est la matrice $P_{B,B'}$ dont la $\text{j}^{\text{ème}}$ colonne donne les coordonnées dans B du $\text{j}^{\text{ème}}$ vecteur de B'. C'est la matrice dans la base B de l'unique application linéaire qui à chaque e_i associe e'_i. C'est donc une matrice inversible, et on a clairement $P^{-1} = P_{B',B}$. C'est aussi la matrice de l'application identité de (E, B') dans (E, B).
Pour tout $x \in E$ on a

$$X_B = P_{B,B'} X_{B'}.$$

Soit $f \in L(E, F)$. On a alors la relation

$$Mat_{B',C'}(f) = P^{-1}_{C,C'} Mat_{B,C}(f) P_{B,B'}.$$

Si on note $y = f(x)$, on a $Y_C = Mat_{B,C}(f) X_B$. D'où $Y_C = P_{C,C'} Y_{C'} = Mat_{B,C}(f) P_{B,B'} X_{B'}$. D'où on déduit facilement la formule ci-dessus.
Si $f \in L(E)$, on a de même :

$$Mat_{B'}(f) = P^{-1}_{B,B'} Mat_B(f) P_{B,B'}.$$

Remarque 5.2 *Toute matrice inversible est une matrice de changement de base.*

Exemple 5.3 *Soit* $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. *On définit l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même par*

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x - 18y - 6z \\ 2x - 5y - 2z \\ -x + 4y + 4z \end{pmatrix}.$$

Donner la matrice de f dans la base formée par les vecteurs colonnes de A.

Exemple 5.4 *Matrice d'une projection et d'une symétrie dans une bonne base. Dans $\mathbb{R}^2$, soit $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ on considère la projection p sur $\mathrm{Vect}(u)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(v)$. Donner la matrice de p dans la base (u, v), puis dans la base canonique. Idem avec la symétrie.*

Exemple 5.5 *Isométries du plan : ce sont les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ qui préservent la distance euclidienne, ou ce qui est équivalent le produit scalaire. Leur matrice dans la base canonique ont des vecteurs colonnes normés et orthogonaux , ce qui impose les formes $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ (matrice de la rotation d'angle θ) et $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ (matrice de la symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Vect}(u_{\theta/2})$, où $u_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$.*

5.1.3 Matrices semblables ; matrices équivalentes

Désormais, on notera $GL_n(K)$ l'ensemble des matrices inversibles dans $M_n(K)$.

Définition 5.2 *Deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ sont dites équivalentes si il existe deux matrices inversibles $P \in GL_p(K)$ et $Q \in GL_n(K)$ telles que $B = QAP$.*

Il découle alors des formules de changement de base ci-dessus :

Proposition 5.2 *Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles représentent la même application linéaire dans des bases différentes.*

Les matrices P et Q sont alors les matrices de changement de base dans E et F.

Définition 5.3 *Deux matrices carrées $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ sont dites semblables si il existe une matrice inversible $P \in GL_n(K)$ telle que $B = P^{-1}AP$.*

Il découle alors des formules de changement de base ci-dessus :

Proposition 5.3 *Deux matrices carrées sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.*

La matrice P est alors la matrice de passage d'une base à l'autre.

5.2 Compléments sur le rang d'une matrice

Proposition 5.4 *Soit $f \in L(E, F)$ et notons $A = Mat_{B,C}(f)$. Le rang de f est égal au rang de A.*

Démonstration Le rang de f est par définition la dimension de l'image de f. Celle-ci est engendrée par $f(e_1), \ldots, f(e_p)$, où $B = (e_i)_{1 \leq i \leq p}$. Or les colonnes de A donnent les coordonnées de ces vecteurs dans la base C de F. Comme l'application qui à $y \in F$ associe le vecteur de ses coordonnées dans C est un isomorphisme, on a la conclusion. ■

Corollaire 5.1 *Deux matrices équivalentes ont le même rang.*

En effet, elles représentent la même application linéaire dans des bases différentes.

Proposition 5.5 *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$. Elle est de rang r si et seulement si elle est équivalente à la matrice $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.*

Démonstration $\Leftarrow$ découle du corollaire ci-dessus.
$\Rightarrow$ Supposons donc que A est de rang r, et soit $f \in L(E, F)$ tel que $A = Mat_{B,C}(f)$. Soit G un supplémentaire dans E du noyau de f. On sait que f induit un isomorphisme entre G et $\mathrm{Im}\,(f)$. On a donc $\dim(G) = r$. Soient $x_1, \ldots, x_r$ une base de G, et $x_{r+1}, \ldots, x_p$ une base du noyau de f. $\mathcal{X} = (x_i)_{1 \leq i \leq p}$ est une base de E. Comme la restriction de f à G est injective, les vecteurs $y_1 = f(x_1), \ldots, y_r = f(x_r)$ sont libres. On les complète en une base $\mathcal{Y} = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$ de F. Du fait de la définition de ces deux bases, on a $Mat_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(f) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ce qui prouve le résultat. ■

Corollaire 5.2 *Deux matrices ont le même rang si et seulement si elles sont équivalentes.*

Par ailleurs, on peut démontrer le résultat suivant :

Théorème 5.1 *Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$, ${}^tA$ et A ont le même rang.*

On en déduit

Corollaire 5.3 *Le rang d'une matrice est égal au rang du système de ses vecteurs lignes. En particulier, il est inférieur ou égal au minimum de n et p.*