

Chapitre 5

Matrice d'une application linéaire. Changement de base

5.1 Matrice d'une application linéaire

Exemple 5.1 *Matrice de la symétrie d'axe la première bissectrice dans \mathbb{R}^2 dans deux systèmes d'axes différents.*

5.1.1 Définition

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, de dimensions respectives p et n . Soient $B = \{e_1, \dots, e_p\}$ une base de E et $C = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ une base de F .

Définition 5.1 *Soit f une application linéaire de E dans F . On appelle matrice de f , relativement aux bases B et C , et on note $A = \text{Mat}_{B,C}(f)$ la matrice dont les colonnes donnent les coordonnées de $f(e_1), \dots, f(e_p)$ dans la base C . Si $E = F$ et $B = C$, $\text{Mat}_{B,C}(f)$ est simplement notée $\text{Mat}_B(f)$.*

Si $x = x_1e_1 + \dots + x_pe_p$, on pose $X_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ (vecteur des coordonnées de x dans la base B). Alors

$f(x) = y = y_1\varepsilon_1 + \dots + y_n\varepsilon_n$, avec

$$Y_C = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = AX_B = \text{Mat}_{B,C}(f)X_B \text{ (vecteur des coordonnées de } y \text{ dans la base } C \text{)} .$$

Exemple 5.2 *Si $E = K^p$ et $F = K^n$, on définit naturellement les endomorphismes dans les bases canoniques B et C de E et F . Notons que ici, pour tout $x \in K^p$ on a $x = X_B$ et pour tout $y \in K^n$ on a $y = Y_C$. Dès que l'on a écrit $f(e_j) = \sum_{i=1}^n A_{i,j}\varepsilon_i$,*

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^p x_j f(e_j) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^p A_{i,j}x_j \right) \varepsilon_i.$$

Donc, dans ce cas on a $f(x) = y = Y_C = AX_B = Ax$, ce qui donne $\text{Mat}_{B,C}(f) = A$ et $f = f_A$.

Remarque 5.1 *La matrice d'une application linéaire f dépend bien sûr du choix des bases. Ce choix étant fait, l'application linéaire est entièrement déterminée par sa matrice.*

Proposition 5.1 *L'application $f \in \mathcal{L}(E, F) \mapsto \text{Mat}_{B,C}(f) \in M_{n,p}(K)$ est un isomorphisme.*

5.1.2 Changement de base

Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ et $B' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E . La matrice de passage de B à B' est la matrice $P_{B,B'}$ dont la $j^{\text{ème}}$ colonne donne les coordonnées dans B du $j^{\text{ème}}$ vecteur de B' . C'est la matrice dans la base B de l'unique application linéaire qui à chaque e_i associe e'_i . C'est donc une matrice inversible, et on a clairement $P^{-1} = P_{B',B}$. C'est aussi la matrice de l'application identité de (E, B') dans (E, B) .

Pour tout $x \in E$ on a

$$X_B = P_{B,B'} X_{B'}.$$

Soit $f \in L(E, F)$. On a alors la relation

$$\text{Mat}_{B',C'}(f) = P_{C',C}^{-1} \text{Mat}_{B,C}(f) P_{B,B'}.$$

Si on note $y = f(x)$, on a $Y_C = \text{Mat}_{B,C}(f) X_B$. D'où $Y_C = P_{C',C} Y_{C'} = \text{Mat}_{B,C}(f) P_{B,B'} X_{B'}$. D'où on déduit facilement la formule ci-dessus.

Si $f \in L(E)$, on a de même :

$$\text{Mat}_{B'}(f) = P_{B,B'}^{-1} \text{Mat}_B(f) P_{B,B'}.$$

Remarque 5.2 Toute matrice inversible est une matrice de changement de base.

Exemple 5.3 Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. On définit l'application linéaire f de \mathbb{R}^3 dans lui-même par

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x - 18y - 6z \\ 2x - 5y - 2z \\ -x + 4y + 4z \end{pmatrix}.$$

Donner la matrice de f dans la base formée par les vecteurs colonnes de A .

Exemple 5.4 Matrice d'une projection et d'une symétrie dans une bonne base. Dans \mathbb{R}^2 , soit $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ on considère la projection p sur $\text{Vect}(u)$ parallèlement à $\text{Vect}(v)$. Donner la matrice de p dans la base (u, v) , puis dans la base canonique. Idem avec la symétrie.

Exemple 5.5 Isométries du plan : ce sont les endomorphismes de \mathbb{R}^2 qui préservent la distance euclidienne, ou ce qui est équivalent le produit scalaire. Leur matrice dans la base canonique ont des vecteurs colonnes normés et orthogonaux, ce qui impose les formes $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ (matrice de la rotation d'angle θ) et $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ (matrice de la symétrie orthogonale par rapport à $\text{Vect}(u_{\theta/2})$, où $u_{\theta} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$).

5.1.3 Matrices semblables ; matrices équivalentes

Désormais, on notera $GL_n(K)$ l'ensemble des matrices inversibles dans $M_n(K)$.

Définition 5.2 Deux matrices $A, B \in M_{n,p}(K)$ sont dites équivalentes si il existe deux matrices inversibles $P \in GL_p(K)$ et $Q \in GL_n(K)$ telles que $B = QAP$.

Il découle alors des formules de changement de base ci-dessus :

Proposition 5.2 Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles représentent la même application linéaire dans des bases différentes.

Les matrices P et Q sont alors les matrices de changement de base dans E et F .

Définition 5.3 Deux matrices carrées $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ sont dites semblables si il existe une matrice inversible $P \in GL_n(K)$ telle que $B = P^{-1}AP$.

Il découle alors des formules de changement de base ci-dessus :

Proposition 5.3 Deux matrices carrées sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.

La matrice P est alors la matrice de passage d'une base à l'autre.

5.2 Compléments sur le rang d'une matrice

Proposition 5.4 Soit $f \in L(E, F)$ et notons $A = \text{Mat}_{B,C}(f)$. Le rang de f est égal au rang de A .

Démonstration Le rang de f est par définition la dimension de l'image de f . Celle-ci est engendrée par $f(e_1), \dots, f(e_p)$, où $B = (e_i)_{1 \leq i \leq p}$. Or les colonnes de A donnent les coordonnées de ces vecteurs dans la base C de F . Comme l'application qui à $y \in F$ associe le vecteur de ses coordonnées dans C est un isomorphisme, on a la conclusion. ■

Corollaire 5.1 Deux matrices équivalentes ont le même rang.

En effet, elles représentent la même application linéaire dans des bases différentes.

Proposition 5.5 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$. Elle est de rang r si et seulement si elle est équivalente à la matrice $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Démonstration \Leftarrow découle du corollaire ci-dessus.

\Rightarrow Supposons donc que A est de rang r , et soit $f \in L(E, F)$ tel que $A = \text{Mat}_{B,C}(f)$. Soit G un supplémentaire dans E du noyau de f . On sait que f induit un isomorphisme entre G et $\text{Im}(f)$. On a donc $\dim(G) = r$. Soient x_1, \dots, x_r une base de G , et x_{r+1}, \dots, x_p une base du noyau de f . $\mathcal{X} = (x_i)_{1 \leq i \leq p}$ est une base de E . Comme la restriction de f à G est injective, les vecteurs $y_1 = f(x_1), \dots, y_r = f(x_r)$ sont libres. On les complète en une base $\mathcal{Y} = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$ de F . Du fait de la définition de ces deux bases, on a $\text{Mat}_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(f) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ce qui prouve le résultat. ■

Corollaire 5.2 Deux matrices ont le même rang si et seulement si elles sont équivalentes.

Par ailleurs, on peut démontrer le résultat suivant :

Théorème 5.1 Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$, tA et A ont le même rang.

On en déduit

Corollaire 5.3 Le rang d'une matrice est égal au rang du système de ses vecteurs lignes. En particulier, il est inférieur ou égal au minimum de n et p .