Université Paris 13, Institut Galilée
Cycle Préparatoire Ingénieur Intégré, $1^{\text{ère}}$ année
Année universitaire 2016-2017, second semestre

Mathématiques
Révision DST2

Exercice 1 (Question de cours)**.** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Soient F et G deux sous-espaces de E. On suppose que $F \cap G = \{0\}$. Montrer que tout vecteur de $F+G$ peut s'écrire d'une unique manière sous la forme $a+b$ avec $a \in F$ et $b \in G$.

2. On suppose que $E = F \oplus G$. Soit $\{x_1, \ldots, x_k\}$ une base de F et $\{x_{k+1}, \ldots, x_n\}$ une base de G. Montrer que $\{x_1, \ldots, x_n\}$ est une base de E.

Solution. *1. Soit x un vecteur de $F+G$. Supposons que $x = a+b = a'+b'$ avec $a, a' \in F$, $b, b' \in G$. Alors on a $a - a' = b' - b$. Le membre de gauche de cette équation est dans F et le membre de droite est dans G. Par hypothèse l'intersection de ces deux espaces est réduite à 0. On en déduit que $a = a'$ et $b = b'$.*

2. Montrons que $\{x_1, \ldots, x_n\}$ est libre. Supposons qu'on ait $0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ où les λ_i sont dans $\mathbb{K}$. En mettant d'un côté du signe égal les termes d'indice $\leq k$ et les autres termes de l'autre côté, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = \sum_{i=k+1}^{n} -\lambda_i x_i$$

Le membre de gauche est dans F et le membre de droite est dans G, donc ils sont tous les deux nuls. Comme $\{x_1, \ldots, x_k\}$ est une base de F on en déduit que $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$. Comme $\{x_{k+1}, \ldots, x_n\}$ est une base de G on a $\lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_n = 0$.

Montrons que $\{x_1, \ldots, x_n\}$ est génératrice. Soit $y \in E$. On peut écrire $y = f+g$ avec $f \in F$ et $g \in G$. Par hypothèse, on peut écrire f comme combinaison linéaire de $\{x_1, \ldots, x_k\}$ et g comme combinaison linéaire de $\{x_{k+1}, \ldots, x_n\}$. On a donc $y = f+g$ est une combinaison linéaire de $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Exercice 2. On considère le sous-espace F de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x+y = 0, x+z = 0\}$$

1. Donner une base de F. On admettra que F est de dimension 2.

2. Compléter la base trouvée en une base de $\mathbb{R}^4$.

3. On pose $u_1 = (1,1,1,1), u_2 = (1,2,3,4), u_3 = (-1,0,-1,0)$. La famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est-elle libre ?

4. On pose $G = \operatorname{Vect}(u_1, u_2, u_3)$. Quelle est la dimension de G. Donner une représentation cartésienne de G.

5. Donner une base et une représentation cartésienne de $F \cap G$?

6. Montrer que $F + G = \mathbb{R}^4$.

7. A-t-on une somme directe $F \oplus G = \mathbb{R}^4$?

Solution. *1. Comme F est de dimension 2, il suffit de trouver deux vecteurs de F formant une famille libre. On peut prendre par exemple $(0,0,0,1)$ et $(1,-1,-1,0)$.*

2. On peut rajouter à ces deux vecteurs les vecteurs $(1,0,0,0)$ et $(0,1,0,0)$.

3. Supposons que $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$. En considérant la deuxième et la quatrième coordonnée, on obtient les équations $a + 2b = 0$ et $a + 4b = 0$. On a donc nécéssairement $a = b = 0$. La première coordonnée nous donne $a + b - c = 0$ et donc $c = 0$. La famille est libre.

4. La famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une famille génératrice de G et elle est libre par la question précédente, c'est donc une base et $\dim(G) = 3$. Comme G est un hyperplan, on peut trouver 4 nombre réels a, b, c, d tels que $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, ax + by + cz + dt = 0\}$. Pour que u_1, u_2, u_3 vérifient cette équation on doit avoir $a + b + c + d = 0$, $a + 2b + 3c + 4d = 0$ et $a + c = 0$. Ce système d'équation nous donne à

$$a + c = 0 \tag{1}$$
$$b + d = 0 \tag{2}$$
$$c + d = 0 \tag{3}$$

Une solution est donnée par $a = 1, b = -1, c = -1, d = 1$. On a donc $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x - y - z + t = 0\}$.

5. Une représentation cartésienne de $F \cap G$ est donnée par $F \cap G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y = 0, x + z = 0, x - y - z + t = 0\}$.

On a $F \cap G \subset F$ et $F \cap G \neq F$, en effet $(0, 0, 0, 1) \in F$ mais $(0, 0, 0, 1) \notin F \cap G$. Donc $F \cap G$ est de dimension 0 ou 1. Si on trouve un vecteur non nul dans $F \cap G$ celui-ci formera donc une base de $F \cap G$. On vérifie aisément que $(1, -1, -1, 3)$ est dans $F \cap G$.

Exercice 3. On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels.

1. On considère l'ensemble F_0 des polynômes P vérifiant $P(0) = 0$, montrer que F_0 est un sous-espace vectoriel.

2. Donner un supplémentaire de F_0. Montrer qu'il est de dimension 1.

3. Soit F_1, le sous-espace de E des polynômes P vérifiant $P(0) = P'(0) = 0$. Soit l'espace $\mathbb{R}_1[x]$ des polynômes de la forme $X \mapsto aX + b$ avec a et b des nombres réels, montrer qu'on a $E = F_1 \oplus \mathbb{R}_1[x]$.

4. Soit F_n, le sous-espace de E des polynômes P vérifiant $P(0) = P'(0) = \ldots = P^{(n)}(0) = 0$. Trouver un supplémentaire de F_n.

Solution. *1. Le polynôme nul est dans F_0, si P et Q sont dans F_0, on a $(P + Q)(0) = P(0) + Q(0) = 0$, enfin si P est dans F_0, on a $\lambda P(0) = 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.*

2. Un polynôme $a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0$ est dans F_0 si et seulement si $a_0 = 0$. Il est donc naturel de penser que le sous-espace C des polynômes constants est un supplémentaire de F_0. On a clairement $F_0 \cap C = \{0\}$. D'autre part si $P = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0$ est un polynôme, on peut écrire

$$P = (a_n X^n + \ldots + a_1 X) + a_0$$

le polynôme $Q = a_n X^n + \ldots + a_1 X$ est dans F_0 et le polynôme $R = a_0$ est dans C. L'espace C est de dimension 1 car le polynôme constant égal à 1 en forme une base.

3. On vérifie aisément qu'un polynôme $a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0$ est dans F_1 si et seulement si $a_0 = a_1 = 0$. On a donc $F_1 \cap \mathbb{R}_1[x] = \{0\}$. D'autre part si $P = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0$ est un polynôme, on peut écrire

$$P = (a_n X^n + \ldots + a_2 X^2) + (a_1 X + a_0)$$

le premier membre de cette somme est dans F_1 et le second est dans $\mathbb{R}_1[X]$, on a donc $E = F_1 \oplus \mathbb{R}_1[X]$.

4. La formule de Taylor nous dit que pour tout P un polynôme de degré d, on a

$$P(X) = P(0) + P'(0)X + \frac{P''(0)}{2} X^2 + \ldots + \frac{P^{(d)}(0)}{d!} X^d$$

On en déduit donc que $P = a_d X^d + \ldots + a_1 X + a_0$ est dans F_n si et seulement si $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$. Il est donc naturel de penser qu'un supplémentaire de F_n est le sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de *degré $\leq n$. En effet on a de manière évidente $F_n \cap \mathbb{R}_n[X] = \{0\}$. D'autre part, un polynôme $P = a_d X^d + \ldots + a_1 X + a_0$ avec $d > n$ peut s'écrire sous la forme*

$$P = (a_d X^d + \ldots + a_{n+1} X^{n+1}) + (a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0)$$

où le premier membre est dans F_n et le second dans $\mathbb{R}_n[X]$. Un polynôme $P = a_d X^d + \ldots + a_1 X + a_0$ avec $d \leq n$ est dans $\mathbb{R}_n[X]$. On a donc bien $F_n + \mathbb{R}_n[X] = E$.

Exercice 4. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soient A, B, C des sous-espaces vectoriels de E tels que : $A \cap C \subset B$, $C \subset A + B$ et $B \subset C$. Montrer que $B = C$.

Solution. *Il faut montrer que $B \subset C$ et $C \subset B$. On a déjà $B \subset C$ par hypothèse. Soit $c \in C$, on peut l'écrire sous la forme $c = a + b$ avec $a \in A$ et $b \in B$ par hypothèse. On a donc $a = c - b$ et donc comme $c \in C$ et $b \in B \subset C$, on a $a \in C$. On en déduit que $a \in A \cap C$ et donc que $a \in B$ d'après l'hypothèse. Le vecteur c est donc la somme de 2 vecteurs de B et est donc dans B.*

Exercice 5. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Soit f un endomorphisme de E vérifiant $f \circ f(x) = -x$ pour tout x dans E. Soit $F = \{x \in E, f(x) = ix\}$ et $G = \{x \in E, f(x) = -ix\}$.

1. Montrer que $F \cap G = \{0\}$.
2. Montrer que $E = F \oplus G$.

   [On pourra observer que pour tout x dans E, on a $x = \frac{x+if(x)}{2} + \frac{x-if(x)}{2}$.]

Solution. *1. Supposons que $x \in F \cap G$. On a donc $f(x) = ix = -ix$. On en déduit que $2ix = 0$ et donc $x = 0$.*

2. Soit $x \in E$, on a $x = \frac{x+if(x)}{2} + \frac{x-if(x)}{2}$. Posons $y = \frac{x+if(x)}{2}$. Calculons $f(y)$. Comme f est un homomorphisme, on a

$$f(y) = \frac{f(x) + if \circ f(x)}{2} = \frac{-ix + f(x)}{2} = -i\left(\frac{x + if(x)}{2}\right) = -iy$$

On a donc $y \in G$. De même on montrerait que $z = \frac{x-if(x)}{2}$ est dans F. On a donc bien $x \in F + G$.

Exercice 6. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que si $F \subset G$ ou $G \subset F$, alors $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. On souhaite montrer la réciproque de la question précédente, à savoir que si $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E, alors $F \subset G$ ou $G \subset F$. On suppose que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E et que F n'est pas inclus dans G. On va montrer que cela implique que G est un sous-espace de F.

   Par notre hypothèse, il existe $f \in F$ tel que $f \notin G$. Soit $g \in G$. Montrer que $h = f + g$ est dans $F \cup G$. Montrer que $h \notin G$. En déduire que $g \in F$.
3. On suppose maintenant E de dimension finie. Soient H et H' deux hyperplans distincts de E. Montrer qu'il existe une droite D de E telle que $H \oplus D = H' \oplus D = E$. [On pourra utiliser la question précédente.]

Solution. *1. Si $F \subset G$ alors $F \cup G = G$ est un sous-espace vectoriel. De même si $G \subset F$, alors $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel.*

2. Le vecteur h est somme de deux vecteurs de $F \cup G$, il est donc dans $F \cup G$. Si on avait $h \in G$, on aurait $f = h - g \in G$ ce qui est absurde par hypothèse, on a donc $h \notin G$. Comme $h \in F \cup G$, on a forcément $h \in F$. Il vient donc que $g = h - f$ est dans F.

3. On commence par montrer qu'il existe un vecteur de E qui n'est ni dans H ni dans H'. En effet si ce n'était pas le cas, on aurait $H \cup H' = E$ donc $H \cup H'$ est un sous-espace vectoriel de E. D'après la question précédente celà impliquerait que $H \subset H'$ ou $H' \subset H$. Dans les deux cas, puisque H et H' ont même dimension, celà impliquerait que $H = H'$ ce qui est exclus par hypothèse. On peut donc trouver $x \notin H \cup H'$, en particulier $x \neq 0$. On pose $D = \mathrm{Vect}(x)$. On a donc $D \cap H = \{0\}$ et $D \cap H' = \{0\}$. D'autre part les sous-espaces $H \oplus D$ et $H' \oplus D$ sont de dimension $(n-1) + 1 = n$ où $n = \dim(E)$. On a donc $H \oplus D = H' \oplus D = E$.