CP2I EXERCICES DE RÉVISIONS

Exercice 1. Soit N la matrice réelle $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(1) Calculer N^2, N^3 et N^4.
(2) Que vaut N^k pour $k \geq 4$?
(3) Soit $P \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ une matrice inversible et $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ une matrice quelconque. En utilisant un raisonnement par récurrence, montrer rigoureusement la formule
$$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$$
pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(4) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
(5) Déduire des questions précédentes la matrice $(P^{-1}NP)^3$.

Exercice 2. On note j le nombre complexe $e^{2i\pi/3}$.

(1) Donner la forme algébrique de j.
(2) Montrer de la manière de votre choix les deux formules suivantes
$$j^3 = 1$$
$$1 + j + j^2 = 0$$
(3) On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{C}^3$ donné par
$$f(x, y, z) = (y, z, x)$$
Justifier que la matrice de f dans la base canonique est
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
(4) On considère la famille suivante de vecteurs de $\mathbb{C}^3$
$$\mathcal{F} = \{(1, 1, 1), (1, j, j^2), (1, j^2, j)\}$$
Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{C}^3$.
(5) Donner la matrice N de f dans la base $\mathcal{F}$.
(6) Justifier que N est inversible et donner son inverse.

Exercice 3. On considère l'application linéaire $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ donnée par la formule
$$q(x, y, z, t) = (x - y + 2t, -x + y + 2z, z + t, z + t)$$

(1) Donner la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
(2) Déterminer une base du noyau de q.
(3) Trouver une base de $\mathrm{Im}(q)$ [si vous n'arrivez pas à faire cette question, vous pouvez utiliser la base $\{(1, -1, 0, 0), (1, 1, 1, 1)\}$ dans la suite].
(4) Justifier que $\ker(q)$ et $\mathrm{Im}(q)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

(5) Soit $\mathcal{B}$ la base de $\mathbb{R}^4$ obtenue en mettant ensemble la base de $\ker(q)$ et celle de $\mathrm{Im}(q)$ obtenues en question (2) et (3) [Remarquons que c'est bien une base par la question (4)]. Écrire la matrice de q dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 4. Soient $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$,

$$w_1 = (1, -2, 0), w_2 = (-1, 2, 0), w_3 = (0, 0, 2)$$

et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par la donnéee des images des vecteurs de la base :

$$u(e_1) = w_1, u(e_2) = w_2, u(e_3) = w_3.$$

(1) Donner la matrice de u dans la base canonique.
(2) Soit $w = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Donner une formule pour $u(w)$.
(3) Trouver une base de $\ker(u)$ et une base de $\mathrm{Im}(u)$.
(4) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$
(5) Déterminer $\ker(u - Id)$ et $\mathrm{Im}(u - Id)$ où Id désigne l'identité de $\mathbb{R}^3$. En déduire que $u - Id$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5. Calculer l'inverse de la matrice complexe suivante :

$$\begin{pmatrix} i & -1 & -2i \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 6. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies. Soient f et g deux applications linéaires de E vers F.

(1) Montrer l'inclusion suivante :

$$\mathrm{Im}(f + g) \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g).$$

(2) En déduire l'inégalité

$$\mathrm{rg}(f + g) \leq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g).$$

(3) Justifier par un exemple que cette inégalité n'est pas une égalité en général.
(4) Montrer l'inégalité.

$$\dim(E) + \dim(\mathrm{Ker})(f + g) \geq \dim(\mathrm{Ker})(f) + \dim(\mathrm{Ker})(g).$$

Solutions

Exercice 1

(1) On trouve

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, N^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) Pour $K \geq 4$, on a

$$N^k = N^{k-4} N^4 = 0$$

(3) Initialisation. On rappelle que n'importe quelle matrice carrée à la puissance zéro est simplement la matrice identité de même taille. On a donc

$$(P^{-1}AP)^0 = I_4 = P^{-1}A^0P$$

Hérédité. On suppose

$$(P^{-1}AP)^n = I_4 = P^{-1}A^nP$$

On calcule

$$\begin{aligned}(P^{-1}AP)^{n+1} &= (P^{-1}AP)^n P^{-1}AP \\ &= (P^{-1}A^nP)P^{-1}AP \\ &= P^{-1}A^nPP^{-1}AP \\ &= P^{-1}A^nI_4AP \\ &= P^{-1}A^nAP \\ &= P^{-1}A^{n+1}P\end{aligned}$$

(4) On trouve

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(5) D'après les questions précédentes, on a

$$(P^{-1}NP)^3 = P^{-1}N^3P$$

On peut cacluler cette matrice, on trouve

$$P^{-1}N^3P = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

(1) On trouve la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) Une base possible du noyau est $\{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, -1)\}$. [Remarque : la réponse n'est pas du tout unique, toute réponse comportant 2 vecteurs non liés et contenus dans le noyau est correcte].

(3) Une base possible de l'image est $\{(1, -1, 0, 0), (1, 1, 1, 1)\}$.

(4) Comme les deux espaces sont de dimension 2, il suffit de vérifier que leur intersection est réduite à zéro. Soit u dans $\ker(u) \cap \mathrm{Im}(u)$. Alors comme u est dans l'image, il doit être de la forme

$$u = (a + b, -a + b, b, b)$$

pour a et b deux réels. Comme u est dans le noyau il est de la forme

$$u = (c, c, d - d)$$

pour c et d deux réels. La seule solution qu' on trouve est

$$a = b = c = d = 0$$

.

(5) On trouve la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 5
On trouve

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -4 & -i & -6i \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 6

(1) Soit $x \in \operatorname{Im}(f+g)$, alors, il existe $y \in E$ tel que $x = (f+g)(y) = f(y)+g(y)$. Donc $c \in \operatorname{Im}(f) + \operatorname{Im}(g)$.

(2) L'inclusion montrée dans la question précédente nous donne

$$\dim(\operatorname{Im}(f+g)) \leq \dim(\operatorname{Im}(f) + \operatorname{Im}(g))$$

D'un autre côté, pour U et V deux sev quelconques, on a

$$\dim(U+V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V)$$

donc

$$\dim(U+V) \leq \dim(U) + \dim(V)$$

en particulier

$$\dim(\operatorname{Im}(f) + \operatorname{Im}(g)) \leq \dim(\operatorname{Im}(f)) + \dim(\operatorname{Im}(g))$$

En mettant bout à bout ces deux inégalités, on trouve l'inégalité voulue.

(3) Prenons $f\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x,y) = x$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $g(x,y) = y$. Alors

$$\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(g) = \operatorname{rg}(f+g) = 1$$

(4) Découle simplement de la question (2) et du théorème du rang.