

**Mathématiques**  
**Fiche d'exercices n°3**

**Exercice 1.** Trouver un espace supplémentaire pour les sous-espaces vectoriels suivants.

$$(1) F = Vect \left( \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \text{ dans } \mathbb{R}^3.$$

$$(2) F = Vect \left( \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/3 \\ 4/9 \\ -1/6 \end{pmatrix} \right) \text{ dans } \mathbb{R}^3.$$

$$(3) F = Vect \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right) \text{ dans } \mathbb{R}^4.$$

$$(4) F = Vect \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ 14 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 2 \\ 3/2 \end{pmatrix} \right) \text{ dans } \mathbb{R}^4.$$

**Exercice 2.** Les fonctions suivantes sont-elles des homomorphismes? Si oui, déterminer leur noyau et leur image.

$$(1) f : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X] \text{ donnée par } a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \mapsto a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2.$$

Que dire si l'on considère la même application de  $\mathbb{R}_3[X]$  dans  $\mathbb{R}_3[X]$ ?

$$(2) g : P_2 \rightarrow P_3 \text{ donnée par } b_0 + b_1X + b_2X^2 \mapsto b_0X + (b_2/2)X^2 + (b_3/3)X^3.$$

**Exercice 3.** (i) Montrer qu'une application linéaire  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est un automorphisme si et seulement si  $f = k \cdot Id_{\mathbb{R}}$  avec  $k \neq 0$ .

(ii) Soit  $f$  un automorphisme de  $\mathbb{R}$  tel que  $f(3) = 7$ . Trouver  $f(-2)$ .

**Exercice 4.** Les applications linéaires suivantes sont-elles des isomorphismes

$$g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4 \text{ donnée par } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a + b + c + d \\ a + b + c \\ a + b \\ a \end{pmatrix}.$$

$$h : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}_3[X] \text{ donnée par } (a, b, c, d) \mapsto c + (c + d)X + (a + b)X^2 + aX^3.$$

$$k : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}_3[X] \text{ donnée par } (a, b, c, d) \mapsto c + (c + d)X + (a + b + 1)X^2 + aX^3.$$

**Exercice 5.** (i) Montrer qu'une fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  est un automorphisme si et seulement si  $f$  est de la forme:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix},$$

où  $ad - bc \neq 0$ .

(ii) Soit  $f$  un automorphisme de  $\mathbb{R}^2$  tel que  $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Trouver  $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ .

**Exercice 6.** Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel et  $f$  un endomorphisme de  $E$  tel que pour tout  $x \in E$ , les vecteurs  $x$  et  $f(x)$  soient liés.

(1) Montrer que pour tout  $x \in E$  il existe  $\lambda_x \in K$  tel que  $f(x) = \lambda_x x$ .

(2) Montrer que si  $(x, y)$  est une famille libre de  $E$ , on a  $\lambda_x = \lambda_y$  (considérer le vecteur  $x + y$ ). En déduire que  $f$  est une homothétie.

**Exercice 7.** Soient  $U$  et  $V$  deux espaces vectoriels isomorphes par l'isomorphisme  $f$  ( $f : V \rightarrow U$ ). Supposons que  $V = V_1 \oplus V_2$ . Montrer que  $U = f(V_1) \oplus f(V_2)$ .

**Exercice 8.** Trouver les images et les noyaux des applications linéaires suivantes

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_3[X] \text{ donnée par } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto a + aX + aX^2.$$

$$g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R} \text{ donnée par } (a, b, c, d) \mapsto a + d.$$

$$h : \mathbb{R}^4 \rightarrow P_2 \text{ donnée par } (a, b, c, d) \mapsto a + b + c + dX^2.$$

**Exercice 9.** Soit  $f$  : l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_3[X]$  défini par  $f(a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3) = a_0 + (a_0 + a_1)X + (a_2 + a_3)X^3$ . Trouver  $\text{Ker}(f)$ ,  $f^{-1}(\{2 - x^3\})$  et  $f^{-1}(\{1 + x^2\})$ .

**Exercice 10.** Soit  $U$  et  $V$  deux espaces vectoriels et  $f$  un homomorphisme  $V$  dans  $U$ . Montrer que  $\text{Ker}(f) = \{0\}$  si et seulement si l'image par  $f$  d'une famille libre est toujours libre.

**Exercice 11.** Soit  $m, n \geq 1$  et  $E$  et  $F$  des  $K$ -espaces vectoriels de dimensions respectives  $n$  et  $m$ . Montrer que  $\mathcal{L}(E, F)$  est de dimension  $nm$ .

**Exercice 12.** Les espaces suivants sont-ils isomorphes ? (1)  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^4$ . (2)  $\mathbb{R}_5[X]$  et  $\mathbb{R}^5$ . (3)  $\mathbb{R}^m$  et  $\mathbb{R}^n$ ,  $n, m \geq 1$ .

**Exercice 13.** On travaille dans  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $D_1 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$  et  $D_2 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$ .

(1) Vérifier que  $D_1$  et  $D_2$  sont supplémentaires.

(2) Donner l'expression de la projection sur  $D_1$  parallèlement à  $D_2$ , et de la symétrie par rapport à  $D_1$  parallèlement à  $D_2$ .

(3) Même question que (2) en échangeant les rôles de  $D_1$  et  $D_2$ .

**Exercice 14.** On considère dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$ , la droite vectorielle  $D$  engendrée par le vecteur  $(-1, 1, 2)$ , et l'ensemble  $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x+2y-z = 0\}$ .

(1) Montrer que  $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$ .

(2) Déterminer l'expression de la projection sur  $P$  parallèlement à  $D$ . Faire de même pour la projection sur  $D$  parallèlement à  $P$ .

(3) Déterminer l'expression de la symétrie par rapport à  $P$  parallèlement à  $D$ . Faire de même pour la symétrie par rapport à  $D$  parallèlement à  $P$ .

**Exercice 15.** On considère dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^4$ , les plans

$$P_1 = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

et

$$P_2 = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

(1) Montrer que  $\mathbb{R}^4 = P_1 \oplus P_2$ .

(2) Déterminer l'expression de la projection sur  $P_1$  parallèlement à  $P_2$ . Faire de même pour la projection sur  $P_2$  parallèlement à  $P_1$ .

(3) Déterminer l'expression de la symétrie par rapport à  $P_2$  parallèlement à  $P_1$ . Faire de même pour la symétrie par rapport à  $P_1$  parallèlement à  $P_2$ .

**Exercice 16.** On considère l'endomorphisme  $\Phi$  de  $\mathbb{R}_3[X]$  qui à un polynôme  $P$  associe le polynôme  $P' + P$ . Déterminer le noyau et l'image de  $\Phi$ .

**Exercice 17.** Soit  $n \geq 1$  et  $(x_0, \dots, x_n)$   $n + 1$  nombres réels distincts.

(1) Montrer que l'application  $\Phi : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, P \mapsto (P(x_0), \dots, P(x_n))$  est un isomorphisme.

(2) Soit  $y = (y_0, \dots, y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Déterminer  $\Phi^{-1}(y)$ .