Université Paris 13, Institut Galilée
Cycle Préparatoire Ingénieur Intégré, $1^{\text{ère}}$ année
Année universitaire 2015-2016, second semestre

Mathématiques
Fiche d'exercices n°4

Exercice 1. Effectuer les calculs suivants :

$$1)\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad 2)\ \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 171 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 173 & 5 \end{pmatrix}$$

$$3)\ \begin{pmatrix} 7 & 0 & 9 & 10 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 12 & 0 & 13 & 14 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 6 & 8 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 8 & 0 & 14 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$4)\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 171 & 1 \end{pmatrix} \qquad 5)\ \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 173 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$6)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad 7)\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \end{pmatrix}$$

$$8)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad 9)\ 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad 10)\ (-2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Calculer le produit ABC, où :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. On pose $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer $(A+B)^2$.

2) Calculer $A^2 + B^2 + 2AB$. Que remarque-t-on ? Expliquer le phénomène.

Exercice 4. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $A = T_{12}(a)$ et $B = T_{12}(-a)$ (avec $a \in \mathbb{R}$).

1) Calculer AB et en déduire une expression de B en fonction de A.

2) Sans calcul, déterminer le produit BA.

3) Interpréter les résultats précédents en terme d'opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice.

Exercice 5. Soient a, b et c des réels non nuls. On définit dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ les matrices $A = T_{12}(a)$ et $B = T_{23}(b)$.

1) À l'aide de l'exercice précédent, déterminer A^{-1} et B^{-1}.

2) Calculer $ABA^{-1}B^{-1}$. Comment aurait-on pu anticiper le résultat ?

Exercice 6. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. En opérant sur les lignes, exprimer B, puis C, à l'aide de A et des matrices élémentaires.

Exercice 7. Exprimer la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ comme produit de matrices élémentaires.

Exercice 8. Déterminer l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}$, où u, $v \in \mathbb{R}$.

Exercice 9. Donner un exemple de matrice carrée A non nulle telle que $A^2 = 0$. Une telle matrice peut-elle être inversible ?

Exercice 10. On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit A une matrice inversible telle que $I + A$ soit inversible.

0) Voit-on facilement comment simplifier $(A(I + A)^{-1}) \cdot (I + A^{-1})$?

1) Calculer $(I + A^{-1}) \cdot (A(I + A)^{-1})$.

2) En déduire $(A(I + A)^{-1}) \cdot (I + A^{-1})$.

Exercice 11. Les fonctions f_1, f_2 et f_3 étant définies sur $\mathbb{R}$, on pose, pour $t \in \mathbb{R}$:

$$A(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & f_2(t) & f_3(t) \\ 0 & 0 & f_2(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Trouver des fonctions g_0, g_1 et g_2 telles que, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$A(t) = g_0(t)I + g_1(t)C + g_2(t)C^2.$$

Exercice 12. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer A^n pour tout $n \geq 1$.

Exercice 13. Soit la matrice

$$A := \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer A^2, puis A^3.

2) Démontrer que, pour tout $p \geq 1$, $A^{3p} = 8^p \cdot I$.

3) Soit $n \geq 1$ un entier. En écrivant n sous la forme $3p + q$ avec $q \leq 2$, donner une expression de A^n.