Université Paris 13, Institut Galilée
Cycle Préparatoire Ingénieur Intégré, 1ère année
Année universitaire 2017-2018, second semestre

Mathématiques
Fiche d'exercices 5

Exercice 1. Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

On note $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'aplication linéaire $X \mapsto AX$.

(1) Soit x le vecteur de coordonnées $(4, 1)$, déterminer $u(x)$.

(2) Déterminer l'image et le noyau de u.

(3) On note $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u)$.

(4) On pose $e'_1 = 3e_1 + e_2$ et $e'_2 = -2e_1 + 5e_2$. Montrer que $\mathcal{E}' = (e'_1, e'_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Déterminer la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}}(u)$

(5) On pose $f'_1 = -f_1$, $f'_2 = 2f_1 - f_2 + 2f_3$ et $f'_3 = f_1 - f_2 + f_3$. On pose $\mathcal{F}' = (f'_1, f'_2, f'_3)$. Montrer que $\mathcal{F}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}'}(u)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(u)$.

Exercice 2. Soient a et b deux nombre réels. On considère l'endomorphisme u du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ donné par $u(z) = az + b\overline{z}$.

(1) Donner la matrice de u dans la base $\mathcal{E} = (1, i)$.

(2) Donner la matrice de u dans la base $\mathcal{F} = (1 - i, 1 + i)$.

(3) Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u)$.

(4) À quelle condition sur a et b l'endomorphisme u est-il inversible ?

Exercice 3. On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ qui envoie $P(X)$ sur $P(X + 1)$.

(1) Calculer la matrice de u dans la base canonique.

(2) Déterminer sans calculs l'inverse de cette matrice.

(3) Généraliser en degré supérieur.

Exercice 4. On considère les sous espaces vectoriels P et D de $\mathbb{R}^3$ avec P le plan d'équation $x + 2y - z = 0$ et D la droite engendrée par $(1, 0, -1)$.

(1) Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection sur P parallèlement à D et de la projection sur D parallèlement à P.

(2) Soit $\mathcal{E}$ une base de $\mathbb{R}^3$ dont les deux premiers vecteurs forment une base de P et dont le dernier vecteur est une base de D. Déterminer les matrices des deux projections dans cette base.

Exercice 5. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On considère l'endomorphisme u du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ donné par $A \mapsto T_{12}(\lambda)A$ et v donné par $A \mapsto D_1(\lambda)A$. Calculer la matrice de u et v dans la base $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$.

Exercice 6. Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(1) Montrer qu'il existe des matrices inversibles P et Q telles que $A = PBQ^{-1}$.

(2) Montrer qu'il existe une matrice inversible telle que $A = PBP^{-1}$. On pourra commencer par déterminer le noyau et l'image de A.

(3) Calculer la valeur de A^n pour tout n.

Exercice 7. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel réel E de dimension 2 qui vérifie $f^2 = -id$.

(1) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) On ne suppose plus E de dimension 2. Essayer de généraliser la question précédente.