Chapitre 6

Déterminants

6.1 Forme p-linéaires

Soit $K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. L'objet de ce chapitre est d'étendre la notion de déterminant de deux vecteurs $u = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ de K^2, défini par le nombre $\varphi(u,v) = ad - bc$, qui mesure d'une part l'indépendence linéaire de ces vecteurs, d'autre part la surface "orientée" du parallélogramme engendré par ces vecteurs. C'est une application bilinéaire, en ce sens que $\varphi(u,v)$ est linéaire en v à u fixé et en v à u fixé.

Soit V et W deux K-espaces vectoriels.

Définition 6.1 *Une application $f : V^p \to W$ est dite p-linéaire si quels que soient $i \in \{1,\ldots,p\}$ et $(u_k)_{k\neq i} \in V^{p-1}$ l'application $V \to W$, $x \mapsto f(u_1,\ldots,u_{i-1},x,u_{i+1},\ldots,u_p)$ est linéaire. L'ensemble de ces applications est un K-espace vectoriel.*
On appelle forme p-linéaire une application p-linéaire à valeurs dans K.

Si $p = 1$ on retrouve la notion habituelle d'application linéaire. Si $p = 2$, on parle d'application (ou de forme) bilinéaire. Détailler le cas du produit scalaire et du déterminant sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.

Définition 6.2 *Soit $\varphi : V^p \to K$ une forme p-linéaire. On dit qu'elle est :*
- *symétrique si $\varphi(\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots) = \varphi(\ldots,x_j,\ldots,x_i,\ldots)$ pour tous $i,j \in \{1,\ldots,p\}$;*
- *antisymétrique si $\varphi(\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots) = -\varphi(\ldots,x_j,\ldots,x_i,\ldots)$ pour tous $i \neq j \in \{1,\ldots,p\}$;*
- *alternée si $\varphi(x_1,\ldots,x_p)$ est nul dès que deux des x_i sont égaux.*

Proposition 6.1 *Une forme p-linéaire est antisymétrique si et seulement si elle est alternée.*

Détailler pour $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ que les formes bilinéaires alternées forment un espace vectoriel de dimension 1.

Définition 6.3 *Soit $p \geq 2$. On appelle transposition toute bijection de $\{1,\ldots,p\}$ dans lui même échangeant deux nombres $i \neq j$ et laissant fixes les autres. On note S_p le groupe des permutations de $\{1,\ldots,p\}$, i.e. l'ensembles des bijections de $\{1,\ldots,p\}$ dans lui même. Ce groupe s'appelle groupe symétrique d'ordre p.*

Théorème et définition 6.1 (Admis) *Soit $p \geq 2$. Tout élément σ de S_p se décompose comme composée d'un nombre N de transpositions. Cette décomposition n'est pas unique en général, mais la parité du nombre N est toujours la même. On définit la signature de σ par $(-1)^N$, i.e. 1 si N est pair et -1 sinon. Ce nombre est noté ε_σ. Il découle de ce qui précède que $\varepsilon_{\sigma'\circ\sigma} = \varepsilon_{\sigma'}\varepsilon_\sigma$.*

On peut alors facilement vérifier par récurrence sur le nombre de permutations nécessaires pour décomposer une permutation en produit de transpositions que pour toute permutation σ de $\{1,\ldots,p\}$, on a

$$\varphi(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(p)}) = \begin{cases} \varphi(x_1,\ldots,x_p) \text{ si } \varphi \text{ est symétrique,} \\ \varepsilon_\sigma \varphi(x_1,\ldots,x_p) \text{ si } \varphi \text{ est antisymétrique, i.e. alternée} \end{cases}$$

Proposition 6.2 *Soit φ une forme p-linéaire alternée sur V (par exemple, φ=déterminant ; voir définition ci-dessous). Elle vérifie :*
$\varphi(x_1, \dots, x_p)$ dépend linéairement de chaque x_i ;
$\varphi(x_1, \dots, x_p)$ est nul dès que deux des x_i sont nuls ;
$\varphi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = \varepsilon_\sigma \varphi(x_1, \dots, x_p)$;
$\varphi(x_1, \dots, x_p)$ reste inchangé si l'on ajoute à x_i une combinaison linéaire des autres x_k.

6.2 Définition du déterminant

La définition du déterminant est liée au théorème fondamental suivant :

Théorème 6.1 *Soit V un K-espace vectoriel de dimension n. Si p est plus grand que n, alors il n'existe pas de forme p-linéaire alternée non nulle sur V. Si $p = n$, alors l'espace des formes n-linéaires alternées sur V est de dimension 1.*

La preuve repose sur le calcul suivant : soient φ une forme p-linéaire alternée sur V, $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de V, et $v_1, \dots v_p$ des vecteurs de V. Si l'on décompose chaque v_i dans la base $\mathcal{B}$, $v_i = \sum_{1 \le k \le n} a_{ki} e_k$, la p-linéarité de φ nous autorise à développer

$$\varphi(v_1, \dots, v_p) = \sum_{1 \le k_1 \le n, \dots, 1 \le k_p \le n} a_{k_1 1} \dots a_{k_p p} \varphi(e_{k_1}, \dots, e_{k_p}).$$

Ainsi, si par exemple p est plus grand que n, alors deux des vecteurs $(e_{k_1}, \dots, e_{k_p})$ au moins sont égaux quelle que soit la valeur de $k_1, \dots, k_p$, ce qui prouve que φ est nulle.
Si maintenant $n = p$ et $\varphi \neq 0$, alors $\varphi(e_{k_1}, \dots, e_{k_n})$ est non nul si et seulement si $\{e_{k_1}, \dots, e_{k_n}\} = \mathcal{B}$ ce qui est encore équivalent à dire que l'application $i \mapsto k_i$ est une permutation σ de $\{1, \dots, n\}$. On a alors $\varphi(e_{k_1}, \dots, e_{k_n}) = \varepsilon_\sigma \varphi(e_1, \dots, e_n)$ et on obtient finalement

$$\varphi(v_1, \dots, v_n) = [\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n}] \varphi(e_1, \dots, e_n).$$

Définition 6.4 *Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de V. On appelle déterminant par rapport à la base $\mathcal{B}$ la forme n-linéaire $V^n \to K$ définie par*

$$\det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n},$$

où pour tout i, $(a_{1i}, \dots, a_{ni})$ désignent les coordonnées de v_i dans la base $\mathcal{B}$. C'est une forme n-linéaire alternée non nulle sur V ; c'est l'unique qui vaille 1 sur $(e_1, \dots, e_n)$. Toute autre forme n-linéaire alternée sur V lui est proportionnelle.

De plus, on a :

Proposition 6.3 *Les vecteurs $v_1, \dots, v_n$ de V forment une base de V si et seulement si* $\det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n) \neq 0$.

En effet, appellons φ l'application $.\det_{\mathcal{B}}$. Si $B = (v_1, \dots, v_n)$ est une base de V, en reprenant le calcul de la preuve du théorème 6.2 en calculant $det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B})$ après avoir exprimer les e_i dans B, on voit que nécessairement $\det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n) \neq 0$, sinon $\varphi = 0$. Si $(v_1, \dots, v_n)$ n'est pas une base, alors automatiquement toute forme n-linéaire alternée s'y annule.

Corollaire 6.1 *Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de V. Alors*

$$\det_{\mathcal{B}'}(v_1, \dots, v_n) = \det_{\mathcal{B}'}(e_1, \dots e_n) \det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n).$$

En effet, comme l'espace des formes n-linéaires alternées est de dimension 1, il existe $\lambda \in K^*$ tel que pour tout $(v_1, \dots, v_n) \in V^n$ on ait

$$\det_{\mathcal{B}'}(v_1, \dots, v_n) = \lambda \cdot \det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n).$$

Prenons $(v_1, \dots, v_n) = (e_1, \dots, e_n)$. On voit bien que comme $\det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots e_n) = 1$, $\lambda = \det_{\mathcal{B}'}(e_1, \dots e_n)$.

6.3 Déterminant d'un endomorphisme

Soit u un endomorphisme de V. L'application

$$V^n \to K, \quad (v_1, \ldots, v_n) \mapsto \det_{\mathcal{B}}(u(v_1), \ldots, u(v_n))$$

est une forme n-linéaire alternée sur V. D'après le théorème 6.1, elle est proportionnelle à $\det_{\mathcal{B}}$. De plus, la formule de changement de base ci-dessus permet de vérifier que le coefficient de proportionnalité ne dépend pas du choix de la base. On l'appelle le déterminant de u.

Théorème et définition 6.2 *On appelle déterminant de u le scalaire* $\det(u)$ *défini par*

$$\det_{\mathcal{B}}(u(v_1), \ldots, u(v_n)) = \det(u) \det_{\mathcal{B}}(v_1, \ldots, v_n), \text{ pour tous } (v_1, \ldots, v_n) \in V^n.$$

Il ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$.

Proposition 6.4 *Soient u et v deux endomorphismes de V. On a :*

1. $\det(\mathrm{Id}) = 1$ *;*
2. $\det(u \circ v) = \det(u) \det(v)$ *;*
3. *u est inversible si et seulement si* $\det(u) \neq 0$ *et dans ce cas,* $\det(u^{-1}) = \det(u)^{-1}$.

Ainsi, le déterminant induit un morphisme de groupe $GL(V) \to K$. Le noyau de ce morphisme s'appelle le groupe spécial linéaire $SL(V) := \{u \in GL(V),\ \det(u) = 1\}$.

6.4 Déterminant d'une matrice carrée

Définition 6.5 *Soit A une matrice carrée d'ordre n de coefficient général A_{ij}. On appelle déterminant de A le scalaire* $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma A_{\sigma(1)1} \ldots A_{\sigma(n)n}$.

Proposition 6.5 *Notons $(A^j)_{1 \leq j \leq n}$ les vecteurs colonnes de A vus commes éléments de K^n. Le déterminant de A coïncide avec le déterminant de $(A^1, \ldots, A^n)$ dans la base canonique, et également avec le déterminant de tout endomorphisme dont A est la matrice dans une certaine base.*

Soient A, B et P trois matrices carrées d'ordre n, avec P inversible. On a :
$\det(AB) = \det(A)\det(B)$;
A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$; on a alors $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$;
$\det(P^{-1}AP) = \det(A)$;
$\det({}^tA) = \det(A)$.

Proposition 6.6 *Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses coefficients diagonaux.*

6.5 Interprétation géométrique

Prenons $K = \mathbb{R}$.

Proposition 6.7 *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. La valeur absolue du déterminant de A est égale au volume du parallélépipède engendré par les vecteurs colonnes de A, i.e. l'ensemble* $C(A^1, \ldots, A^n) = \{\sum_{j=1}^n \lambda_j A^j : \lambda_j \geq 0,\ \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1\}$.

Si A n'est pas inversible, c'est clair, puisque l'ensemble en question est contenu dans un hyperplan.
Si A est inversible. On suppose d'abord que A est une matrice élémentaire. On a clairement $\det(D_i(a)) = a$ et $\det(T_{i,j}(\lambda)) = 1$. Et dans chacun des cas, la propriété est vérifiée, en utilisant le fait que la propriété est vraie en dimension 2. Or $(A^1, \ldots, A^n) = (AE^1, \ldots, AE^n)$, où $(E^1, \ldots E^n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On a donc obtenu que pour toute toute matrice élémenraire Q, le volume de $C(QE^1, \ldots, QE^n)$ est égal à $|\det(Q)|$. Par conséquent, pour tout cube C_ε élémentaire de côté ε, le volume de $f_Q(C\varepsilon)$ vaut $|\det(Q)|\varepsilon^n$.

Il s'ensuit que pour tous vecteurs $X^1, \cdots, X^n$ de $\mathbb{R}^n$ et toute matrice élémenraire Q, le volume de $C(QX^1, \ldots, QX^n)$ est égal à $|\det(Q)|$ fois celui de $C(X^1, \ldots, X^n)$. On le voit en approchant E par des réunions de cubes élémentaires.
Maintenant, comme A s'écrit comme produit de matrices élémentaires et que le déterminant est un morphisme multiplicatif, on a la conclusion par récurrence sur le nombre de matrices élémentaires nécessaires pour écrire A.

6.6 Calcul d'un déterminant

Développement le long de la $j^{\text{ième}}$ colonne :
Soit A une matrice carrée d'ordre n de terme général A_{ij}. On appelle cofacteur (i, j) et on note $C_{i,j}(A)$ la quantité $(-1)^{i+j}$ multipliée par le déterminant de la matrice carrée de taille $n-1$ obtenue à partir de A en supprimant le ligne i et la colonne j. On a alors la *formule de développement du déterminant par rapport à la colonne j*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{i,j} C_{i,j}(A)$$

et la *formule de développement du déterminant par rapport à la ligne i*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} C_{i,j}(A).$$

Pour calculer le déterminant d'une matrice de dimension au plus trois, on peut appliquer directement la formule. Si la taille de la matrice est 4 ou plus, il faut alors utiliser de manière astucieuse : les règles de la proposition 6.2 pour faire apparaître des 0 dans la matrice, on les applique aux lignes ou aux colonnes de la matrice puisque $\det({}^tA) = \det(A)$; puis le développement le long d'une colonne ou d'une ligne, **sans oublier les signes** des cofacteurs.
En fait, on peut aussi mettre la matrice sous forme échelonnée réduite, et si elle est inversible alors son déterminant est l'inverse du produit des déterminants des matrices de dilatations utilisées.