

Chapitre 2

Espaces vectoriels de dimension finie

2.1 Dimension

Définition 2.1 On appelle espace vectoriel de dimension finie tout espace vectoriel admettant une famille génératrice finie. Sinon, l'espace est dit de dimension infinie.

Le théorème suivant affirme que tout espace vectoriel de dimension finie possède une base.

Théorème 2.1 (Base incomplète) Soit E un espace vectoriel non nul de dimension finie sur K . Soit G une famille génératrice finie de E , et soit $L \subset G$ une sous famille libre. Il existe une base B de E telle que $L \subset B \subset G$.

Corollaire 2.1 Sous les hypothèses du théorème, il existe toujours $B \subset G$ qui soit une base de E .

Corollaire 2.2 Soit (e_1, \dots, e_k) une famille libre de vecteurs d'un espace vectoriel de dimension finie E . Il existe des vecteurs e_{k+1}, \dots, e_n tels que e_1, \dots, e_n est une base de E .

Preuve. Il suffit pour le voir d'appliquer le théorème de la base incomplète aux familles $L = \{e_1, \dots, e_k\}$ et $L \cup G$, où G est une famille génératrice quelconque de E .

Preuve du théorème de la base incomplète. On construit à partir de L une suite strictement croissante de familles libres de E .

Traisons d'abord le cas où L est réduite à un vecteur u_1 , ce qui permet de construire une base en partant d'un des vecteurs générateurs. Supposons construite une partie libre $L_k = \{u_1, \dots, u_k\} \subset G$ avec $k \geq 1$ (c'est vérifié pour $k = 1$). Si L_k est génératrice, on a fini. Sinon, il existe $u_{k+1} \in G$ tel que $u_{k+1} \notin \text{Vect}(L_k)$. Autrement, puisque l'on pourrait exprimer chaque $u \in G$ comme combinaison linéaire d'éléments de L_k , il en irait de même de toutes les combinaisons linéaires d'éléments de G , i.e. de tous les vecteurs, donc L_k serait génératrice. Donc $L_{k+1} = L_k \cup \{u_{k+1}\}$ est une partie libre incluse dans G . On construit ainsi une suite strictement croissante de parties libres tant que L_k n'engendre pas E . Le processus s'arrête en temps fini puisque $L_k \subset G$ et G est fini. Il existe donc $k_0 \leq \#G$ tel que $L = L_1 \subset L_{k_0} \subset G$ et L_{k_0} soit libre et génératrice.

Si l'on part d'une famille libre $L = \{u_1, \dots, u_{k_0}\} \subset G$ quelconque, on procède de la même façon. Si L est déjà génératrice, il n'y a rien à faire. Sinon on complète par récurrence.

Théorème et définition 2.1 Soit E un espace vectoriel non nul de dimension finie sur K . Toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments. Ce nombre est appelé la dimension de E et est noté en général $\dim_K E$. Si $E = \{0\}$, on convient que $\dim_K E = 0$.

Par convention, la dimension d'un espace vectoriel réduit au vecteur nul est égale à 0.

Preuve : (1) Cas des petits nombres.

(a) Il existe une base à un élément e . Alors, si $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ est une autre base, tous les ε_i s'écrivent $\varepsilon_i = \lambda_i e$ avec $\lambda_i \neq 0$. Donc si $p \geq 2$, ε_1 et ε_2 sont liés, contradiction.

(b) Il existe une base à deux éléments (e_1, e_2) . Alors, si $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ est une autre base, tous les ε_i s'écrivent $\varepsilon_i = \lambda_{i,1} e_1 + \lambda_{i,2} e_2$ avec $\lambda_{i,1}, \lambda_{i,2} \in \mathbb{K}$ et au moins l'une des deux coordonnées non nulle. Supposons $p \geq 3$.

Comme $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est libre, les vecteurs coordonnés $\begin{pmatrix} \lambda_{1,1} \\ \lambda_{1,2} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \lambda_{2,1} \\ \lambda_{2,2} \end{pmatrix}$ ne sont pas liés. Ceci implique que e_1 et e_2 sont engendrés par ε_1 et ε_2 , il en va donc de même de ε_3 . Contradiction. Donc $p \leq 2$. Mais si $p = 1$, alors d'après le (a) les vecteurs e_1 et e_2 doivent être liés; nouvelle contradiction. Ainsi $p = 2$.

(2) Cas général. On raisonne par récurrence sur $n \geq 1$ pour montrer que dans tout espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0\}$, si l'on a deux bases (e_1, \dots, e_n) et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ telles que $p \geq n$, alors on a $n = p$.

Le cas $n = 1$ est clair. Supposons le résultat vrai pour $n - 1$ avec $n \geq 2$. Soit E un espace vectoriel et deux familles libres (e_1, \dots, e_n) et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ avec $p \geq n$ et $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p) = E$.

(1) Il existe e_i tel que $(e_i, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p)$ soit libre et forme une base de E . En effet, si tous les e_i sont engendrés par $\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p$, il en est de même de ε_1 . Contradiction.

$(e_i, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p)$ engendre alors ε_1 , sinon, on pourrait former la famille libre $(e_i, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p)$. Or e_i est engendré par les ε_j .

(2) Appelons $\lambda_{k,i}$ la composante de chaque ε_k sur e_i . On a que $(e_i, \varepsilon_k - \lambda_{k,i}e_i : 2 \leq k \leq p)$ est une base de E .

On voit aussi que $(\varepsilon_k - \lambda_{k,i}e_i : 2 \leq k \leq p)$ et $(e_j : j \neq i)$ sont des bases de $\text{Vect}(e_j : j \neq i)$.

En effet, $(\varepsilon_k - \lambda_{k,i}e_i : 2 \leq k \leq p)$ est libre et contenue dans $\text{Vect}(e_j : j \neq i)$. De plus $(\varepsilon_k - \lambda_{k,i}e_i : 2 \leq k \leq p)$ engendre $\text{Vect}(e_j : j \neq i)$, sinon $(e_i, \varepsilon_k - \lambda_{k,i}e_i : 2 \leq k \leq p)$ ne pourrait être une base de E . Donc, par hypothèse de récurrence on a $n - 1 = p - 1$, d'où $n = p$.

Théorème 2.2 *Dans un espace vectoriel de dimension n , toute famille de plus de n vecteurs est liée (et toute famille libre a au plus n vecteurs).*

Corollaire 2.3 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n , et soit (v_1, \dots, v_n) une famille de n vecteurs. On a équivalence entre :*

1. (v_1, \dots, v_n) est une base de E ,
2. (v_1, \dots, v_n) est une famille libre,
3. (v_1, \dots, v_n) est une famille génératrice.

Exercice 2.1 –

- 1- Quelle est la dimension de \mathbb{C} espace vectoriel sur \mathbb{R} ? sur \mathbb{C} ?
- 2- Quelle est la dimension de K^n ?
- 2- Quelle est la dimension de $\mathbb{C}_n[X]$ sur \mathbb{R} ? Sur \mathbb{C}
- 2- Quelle est la dimension de $E \times F$? (détailler)

2.2 Sous-espaces vectoriels

Proposition 2.1 *Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E . Alors, F est de dimension finie, et $\dim(F) \leq \dim(E)$. De plus, on a $\dim(F) = \dim(E) \iff F = E$.*

Preuve. F ne peut contenir de famille libre infinie, sinon il en irait de même de E , qui contiendrait alors des sous-espaces des familles libres de cardinal supérieur à sa dimension. En appliquant le corollaire 2.2, on aurait alors une contradiction. On voit alors que F est de dimension finie, et que toute base de F peut être complétée en une base de E , donc $\dim(F) = \dim(E) \iff F = E$.

Exemple 2.1 *Les droites, les plans, les hyperplans.*

Proposition 2.2 *Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur K . Soit F un espace vectoriel de dimension finie. Tout sous-espace vectoriel F de E admet au moins un supplémentaire G dans E et*

$$E = F \oplus G \Rightarrow \dim(E) = \dim(F) + \dim(G).$$

Si F et G sont deux sous-espaces de E en somme directe, i.e. $F \oplus G$, alors $\dim F + G = \dim(F) + \dim(G)$. Plus généralement, si les E_k sont des sev de E en somme directe, $\bigoplus_{i=1}^k E_k$, alors $\dim \bigoplus_{i=1}^k E_k = \sum_{i=1}^k \dim E_k$.

Exercice 2.2 – Dans \mathbb{R}^4 , on considère le sous-espace F engendré par (a, b, c) et le sous-espace G engendré par (d, e) .

$$a = (1, 2, 3, 4), b = (1, 1, 1, 3), c = (0, 1, 2, 2), d = (1, 0, -1, 2), e = (2, 3, 0, 1)$$

Déterminer les dimensions de $F, G, F \cap G, F + G$ et des bases de ces sous-espaces, et des représentations cartésiennes (on cherchera d'abord une base de $F \cap G$).

Définition 2.2 (Rang d'un système de vecteurs) *On appelle rang d'un système de vecteurs S la dimension du sous-espace vectoriel, supposé de dimension finie, engendré par ce système.*

C'est donc le nombre maximal de vecteurs indépendants dans S . Notons n la dimension de E . On donnera plus tard une méthode systématique de calcul du rang.