MATHÉMATIQUES S2

CP2I Première Année

27 mars 2024

Chapitre 1

Espaces vectoriels

1.1 Quelques motivations

L'ensemble $\mathbb{R}^n$ est composé des n-uplets d'éléments de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire d'éléments écris sous la forme $u = (x_1, \ldots, x_n)$ où chaque x_i $(1 \leq i \leq n)$ est un nombre réel. Nous les noterons dans ce cours indiféremment en ligne ou en colonne.

Cet ensemble est muni d'une **opération interne** : l'addition. Il s'agit d'une application notée $+$ définie sur le produit $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et défini comme suit : si $u = (x_1, \ldots, x_n)$ et $v = (y_1, \ldots, y_n)$ sont dans $\mathbb{R}^n$, alors $u + v$ est l'élément

$$u + v = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$

L'ensemble $\mathbb{R}^n$ est également muni d'une **multplication externe**, notée $\cdot$ (ou absence de symbole). C'est une application $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie par : si $u = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\lambda u = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

Avec ces deux lois (addition et multiplication externe), nous dirons que $\mathbb{R}^n$ est muni d'une structure d'**espace vectoriel**, et ces éléments s'appeleront des **vecteurs**.

Le but de ce cours est d'étendre cette notion à des ensembles plus généraux, et à étudier les liens entre eux. Cela passera par l'étude des fonctions entre espaces vectoriels qui préservent cette structure : les **applications linéaires**.

(1) Classifier les applications les plus "simples" de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$: les applications linéaires. Elaborer des méthodes systématiques permettant de les exprimer plus simplement en changeant de coordonnées.

Cas $n = m = 1$ **:**Le cas $n = m = 1$ est particulièrement simple. Rappelons quand même qu'une application $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est linéaire si et seulement si elle est de la forme $L(x) = ax$.

Cas $n = 2, m = 1$ **:** Prenons l'exemple des applications linéaires $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. La linéarité signifie que

$$L(\lambda u + \mu v) = \lambda L(u) + \mu L(v) \quad \forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall\ u, v \in \mathbb{R}^2.$$

En posant $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xe_1 + ye_2$ et

$$L : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto xL(e_1) + yL(e_2) = ax + by.$$

Ainsi, l'application est parfaitement déterminée par la donnée du couple (a, b). Supposons $ab \neq 0$. On s'intéressera toujours à $\mathrm{Ker}(L)$ (le noyau de L), qui est $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \right\}$. $\mathrm{Ker}(L)$ est donc la droite d'équation $ax + by = 0$. Soit u_0 un vecteur non nul de la droite $\mathrm{Ker}(L)$.

On peut toujours choisir $v_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ tel que $ax_0 + by_0 \neq 0$ puisque $ab \neq 0$. Par exemple, si $b \neq 0$, $x_0 = 1$ et $y_0 \neq -a/b$.

Tout vecteur v de $\mathbb{R}^2$ s'écrit de façon unique dans la base $B' = (u_0, v_0)$ (dessin avec $a = b = 1$) :

$$v = x'u_0 + y'v_0 = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{B'}$$

et par linéarité de L

$$L(v) = x'L(u_0) + y'L(v_0) = y'L(v_0) \text{ donc } L\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{B'} = 0 \cdot x' + b'y' = b'y'$$

dans la nouvelle base. Dans cette base, l'application est parfaitement déterminée par le seul nombre b'. Il y a eu simplification.

Cas $n = m = 2$: La forme générale des applications linéaires de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est

$$L : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto xL(e_1) + yL(e_2) = x\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}.$$

L'application est parfaitement déterminée par la donnée des 4 ($=n \times m$) nombres a, b, c, d que l'on mettra dans un tableau, appelé matrice de L dans la base $B = (e_1, e_2)$:

$$Mat_B(L) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

On démontrera que dans la plupart des cas il existe deux réels λ_1 et λ_2 et une base B' de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle L se réduit simplement à une homothétie dans chacune des directions de la base :

$$L : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 x' \\ \lambda_2 y' \end{pmatrix}.$$

Dans cette base, l'application L est parfaitement déterminée par la donnée des 2 nombres λ_1, λ_2. Sa matrice devient

$$Mat_{B'}(L) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

On dit qu'on a **réduit** l'endomorphisme L.

Remarque 1.1. Ce n'est pas toujours le cas. Par exemple, la rotation de centre $(0,0)$ et d'angle θ dans $\mathbb{R}^2$ est l'application

$$L : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\theta)x + \sin(\theta)y \\ -\sin(\theta)x + \cos(\theta)y \end{pmatrix},$$

et on ne peut pas l'écrire plus simplement dans une autre base, ce qui est assez intuitif.

(2) Etude asymptotique de systèmes dynamiques. Exemple de la suite de Fibonacci

On définit la suite $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$, qui peut représenter le nombre de couples de lapins observés à intervalles de temps réguliers en partant d'un couple. C'est une suite récurrente d'ordre 2 de la forme $u_{n+1} = f(u_n, u_{n-1})$, avec ici $f(x,y) = x + y$, donc la relation est linéaire. On aimerait avoir un ordre de grandeur, ou même un équivalent de u_n quand n devient très grand. On aimerait aussi avoir une méthode permettant de traiter le cas de toute suite récurrente d'ordre arbitraire $k \geq 1$ fixé à l'avance.

Dans le cas de la suite de Fibonacci, on peut se placer dans $\mathbb{R}^2$ et regarder l'évolution du vecteur $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix}$. On peut écrire

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n + u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} = L\left(\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix}\right) \quad \text{avec } L : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \underbrace{L \circ L \circ \cdots \circ L}_{n} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}.$$

Il s'agit de comprendre comment évoluent les itérées de L pour comprendre comment se comporte la suite, et ce quelles que soient les conditions initiales u_0 et u_1. Cette question se mettra aussi sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}.$$

La solution relève la réduction des endomorphismes. Grâce à une telle réduction, on montre l'existence d'une nouvelle base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle l'action de L est très simple : soit

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et

$$e_1' = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \; e_2' = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On peut exprimer tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ dans la base $B' = (e_1', e_2')$. Dans cette base on a

$$L\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{B'} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} x' \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} y' \end{pmatrix}_{B'} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{B'},$$

donc L agit séparément sur les coordonnées x' et y'. On a réduit la situation à un comportement très simple. Cela conduit à

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}_{B'} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}_{B'} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}_{B'}$$

De là, on conclut si l'on sait passer de $B = (e_1, e_2)$ à B', ce qui est le cas. On a pour tout $(x', y') \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{B'} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ -1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

On en déduit

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ -1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}.$$

Dans le cas où $u_0 = u_1 = 1$, on voit alors que la population croît exponentiellement :

$$u_{n+1} \sim_{+\infty} \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}.$$

Si $u_0 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $u_1 = 1$ alors

$$u_{n+1} \sim_{+\infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}.$$

(3) Systèmes dynamiques en temps continu.

La réduction 0 des applications linéaires permet également d'étudier la structure des solutions de systèmes différentiels lináires du premier ordre. Exemple en dimension 2 :

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax(t) + by(t) \\ cx(t) + dy(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} \quad (t \geq 0)$$

et par "linéarisation" l'étude locale de systèmes non linéaires.

Applications nombreuses : mécanique, électronique, chimie, biologie, économie.

(4) Résolution numérique approchée des équations différentielles et des équations aux dérivées partielles. L'algèbre linéaire y intervient après qu'on a discrétisé les opérations de dérivation ou de dérivations partielles. Exemple : équation de la chaleur $T(t, x) : \dfrac{\partial T}{\partial t} - \kappa \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$, où $x \in [0, 1]$ avec conditions aux bords $T(t, 0)$ et $T(t, 1)$.

1.2 Structure d'espace vectoriel

On se place pour le moment dans un cadre abstrait qui couvre beaucoup de situations déjà rencontrées.

Définition 1.1. Soit $K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ (K est un corps). Un **espace vectoriel** sur K, ou K-espace vectoriel, est un ensemble E non vide, muni d'une loi de composition interne, appelée addition et notée $+$ qui en fait un groupe commutatif (ou abélien), *i.*e.

(addition) $+ : x, y \in E \mapsto x + y \in E$ munie des propriétés :

1. (associativité de $+$) $\forall x, y, z \in E,\ (x + y) + z = x + (y + z)$;
2. (élément neutre pour $+$) : il existe un élément noté 0_E, ou simplement 0, tel que $\forall x \in E, \quad x + 0 = 0 + x = x$; cet élément s'appelle le vecteur nul ;
3. (existence d'un inverse, ou symétrique) : $\forall x \in E, \exists y \in E, \quad x + y = y + x = 0$; un tel y est unique et se note $-x$.
4. (commutativité de $+$) : $\forall x, y \in E,\ x + y = y + x$;

et d'une multiplication externe

(multiplication) $\cdot : (\lambda, x) \in K \times E \mapsto \lambda \cdot x \in E$, aussi noté λx, munie des propriétés :

1. (élément neutre pour $\cdot$) $\forall x \in E,\ 1 \cdot x = x$;
2. (associativité de $\cdot$) $\forall x \in E, \forall \lambda, \mu \in K,\ \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$;
3. (distributivité de $\cdot$ par rapport à $+$) $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in K,\ \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;
4. (distributivité de $\cdot$ par rapport à $+_K$) $\forall x \in E, \forall \lambda, \mu \in K,\ (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$.

Les éléments de K sont appelés scalaires, et les éléments de E vecteurs.

Proposition 1.1. *Soit E un espace vectoriel sur K. Pour tout $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in K$:*

1. $\lambda x = 0 \iff (\lambda = 0$ *ou* $x = 0)$
2. $(\lambda - \mu)x = \lambda x - \mu x$
3. $\lambda(x - y) = \lambda x - \lambda y$.

Démonstration. 1. (a) $0x = (0 + 0)x = 0x + 0x$, d'où $0x = 0$.
   (b) $\lambda 0 = \lambda(0 + 0) = \lambda 0 + \lambda 0$, d'où $\lambda 0 = 0$.
   (c) Si $\lambda x = 0$ et si $\lambda \neq 0$ alors
$$x = 1x = (\lambda^{-1}\lambda)x = \lambda^{-1}(\lambda x) = \lambda^{-1}0 = 0.$$
2. $\lambda x = ((\lambda - \mu) + \mu)x = (\lambda - \mu)x + \mu x$, d'où le résultat.
3. $\lambda x = \lambda((x - y) + y) = \lambda(x - y) + \lambda y$, d'où le résultat.

□

Exemple 1.1. 1. K est un espace vectoriel sur lui-même.
2. L'ensemble des vecteurs de la géométrie euclidienne en dimension 2 et 3, notés $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

3. $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$.
4. Si E est un espace vectoriel, et X un ensemble non vide quelconque, l'ensemble des applications $X \to E$, noté E^X ou $\mathcal{F}(X, E)$ est un espace vectoriel. En particulier :
   (a) L'ensemble des applications définies sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{C}$.
   (b) L'ensemble des polynômes à une indéterminée à coefficients dans K.
   (c) Les suites d'éléments de K.
5. L'ensemble des fonctions continues sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.
6. Les suites convergentes d'éléments de K.
7. Les suites d'éléments de K convergeant vers 0 .

Définition 1.2. Soient E et F deux espaces vectoriels sur $K = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On définit **le produit cartésien** $E \times F$ comme l'ensemble des couples (x, y) où x décrit E et y décrit F. Il peut être muni d'une structure d'espace vectoriel, appelé **l'espace vectoriel produit** :

1. $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$,
2. $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$

On peut faire aisément de même avec un nombre fini quelconque d'espaces et en déduire notamment la construction de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ comme espaces produits.

1.3 Sous-espaces vectoriels

Définition 1.3. Soit E un espace vectoriel sur un corps K. Une partie non vide F de E est **sous-espace vectoriel** de E si c'est un espace vectoriel sur K pour les opérations $+$ et $\cdot$ induites sur F. Nous noterons dans ce cours $\mathcal{V}(E)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E.

Théorème 1.1. *Une partie non vide F de E est sous-espace vectoriel de E si et seulement si elle vérifie :*

1. $\forall (x, y) \in F \times F,\ x + y \in F$,
2. $\forall \lambda \in K, \forall x \in F,\ \lambda \cdot x \in F$.

De façon équivalente :

$$F \in \mathcal{V}(E) \Longleftrightarrow \begin{cases} F \neq \emptyset \\ \forall x, y \in E, \forall \lambda \in K, \lambda x + y \in F \end{cases}.$$

Remarque 1.2. Si F est un sous-espace de E et si E est un sous-espace de G, alors F est un sous-espace de G (la relation "être un sous-espace" est transitive).

Exemple 1.2. 1. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, les droites passant par $(0, 0)$ sont des sous-espaces vectoriels. Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, les droites et les plans passant par $(0, 0, 0)$ sont des sous-espaces vectoriels.

2. E =l'espace des suites d'éléments de K, F=l'espace des suites convergentes d'éléments de K, G =l'espace des suites convergeant vers 0 d'éléments de K. G est un sous-espace de F, qui est un sous-espace de E.
3. L'ensemble des fonctions réelles dérivables sur $[0, 1]$ est un sous-espace vectoriel de $C([0, 1], \mathbb{R})$.
4. $\{f \in C([0, 1], \mathbb{R}) : f(1/2) = 0\}$, $\{f \in C([0, 1], \mathbb{R}) : \int_0^1 f(t)\, dt = 0\}$ sont des sous espaces vectoriels de $C([0, 1], \mathbb{R})$.
5. $\{f \in C([0, 1], \mathbb{R}) : f(1/2) = 1\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel.

Exemple 1.3. 1. L'intersection d'un nombre quelconque de sous-espaces vectoriels est un espace vectoriel.

2. Qu'en est-il de la réunion de sous-espaces vectoriels ?
3. Soit n un entier supérieur ou égal à 2, et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des éléments de K. Alors l'ensemble des vecteurs $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de K^n tels que $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n = 0$ est un sous-espace vectoriel de K^n. On le verra comme le noyau de l'application linéaire $L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$, appelée forme linéaire.
4. L'ensemble des vecteurs $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ de K^p solution du système d'equations linéaires

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = 0, \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = 0 \end{cases}$$

est un sous-espace vectoriel de K^p puisque c'est une intersection de sous-espaces vectoriels. Une telle représentation est dite représentation cartésienne. Par exemple dans $\mathbb{R}^3$, l'intersection de deux plans vectoriels prend, comme on le sait, la forme

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0, \\ a'x + b'y + c'z = 0 = 0 \end{cases} .$$

Ces deux plans sont confondus si les vecteurs $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ sont colinéaires, et sintersectent sinon.

Anticipant un peu sur la définition suivante, disons qu'il est toujours possible de passer d'une représentation cartésienne à une représentation paramétrique, opération qui prend la forme suivante dans le cas particulier de l'intersection de deux plans vectoriels : expliquer.

Définition 1.4. On appelle **combinaison linéaire** d'une famille $(x_i)_{I\in I}$ d'éléments de E tout élément x de la forme $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i$, où les λ_i qui sont tous nuls sauf pour un nombre fini d'indices.

Définition 1.5 (Espace engendré par une partie non vide A de E)**.** Soit A une partie non vide de l'espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$. **L'espace engendré** par A est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A, i.e. l'ensemble des vecteurs x de la forme $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i$, où I est un ensemble fini, les x_i sont des vecteurs de E, et les λ_i des scalaires. On le note $\mathrm{Vect}(A)$. Par convention, on pose $\mathrm{Vect}(\emptyset) = \{0\}$.

Théorème 1.2. *L'espace engendré par A est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A. C'est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant A :*

$$\mathrm{Vect}(A) = \bigcap_{\substack{F \text{ sev de } E \\ A \subset F}} F.$$

$\mathrm{Vect}(A)$ est évidemmment un sous-espace vectoriel de E contenant A. Soit F un autre sous-espace vectoriel contenant A, il en contient toutes les combinaisons linéaires, donc il contient $\mathrm{Vect}(A)$.

Définition 1.6. Avec les notations précédentes, on dit que A est une *partie génératrice* de F.

Proposition 1.2.
1. *Si $A \subset B$, alors $\mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Vect}(B)$.*
2. *Une partie A de E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $A = \mathrm{Vect}(A)$.*
3. *Pour toute partie A de E, on a $\mathrm{Vect}(\mathrm{Vect}(A)) = \mathrm{Vect}(A)$.*

Exemple 1.4. (1) Dans $\mathbb{R}^2$, $A = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$ et $A_1 = \left\{\begin{pmatrix}-8\\0\end{pmatrix}\right\}$ engendrent la droite vectorielle d'équation $y = 0$; $A' = \left\{\begin{pmatrix}-3\\-6\end{pmatrix}\right\}$ et $A'_1 = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\-6\end{pmatrix}\right\}$ engendrent la droite vectorielle $y - 2x = 0$; et $B = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ et $B = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\-5\end{pmatrix}\right\}$ engendrent $\mathbb{R}^2$.

La base canonique de $\mathbb{R}^n$ engendre $\mathbb{R}^n$. Rappelons que la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ $B = (e_1, \ldots, e_n)$ où pour chaque $1 \leq i \leq n$, e_i est le vecteur dont les coordonnées sont toutes nulles, sauf la i-ième qui vaut 1. Pour chaque vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n)$ on a :

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

(2) Les polynômes 1, X, et X^2 engendrent l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 2, noté $\mathbb{R}_2[X]$.

(3) Dans l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, le sous-espace engendré par les fonctions

$$t \mapsto \sin nt, \quad t \mapsto \cos nt, n \in \mathbb{N},$$

est le sous-espace des polynômes trigonométriques.

1.4 Somme de sous-espaces vectoriels

Définition 1.7. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E sur K. On définit

$$F + G = \{x + y,\ (x, y) \in F \times G\}.$$

Proposition 1.3. *1. Si $F, G \in \mathcal{V}(E)$, alors $F+G \in \mathcal{V}(E)$.*

2. Soient A et B deux parties de E. Alors :

$$\mathrm{Vect}(A) + \mathrm{Vect}(B) = \mathrm{Vect}(A \cup B).$$

Démonstration. 1. Soit $z_1, z_2 \in F+G$ et $\lambda \in K$. On peut alors écrire $z_1 = x_1 + y_1$ et $z_2 = x_2 + y_2$ avec $x_1, x_2 \in F$ et $y_1, y_2 \in G$. On a alors :

$$\lambda z_1 + z_2 = \lambda(x_1+y_1) + (x_2+y_2) = (\lambda x_1 + x_2) + (\lambda y_1 + y_2) \in F+G.$$

Donc $F+G$ est bien un sous-espace vectoriel de E.

2.

$$\left\{ \begin{array}{l} A \subset A \cup B \\ B \subset A \cup B \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Vect}(A \cup B) \\ \mathrm{Vect}(B) \subset \mathrm{Vect}(A \cup B) \end{array} \right. \Rightarrow \mathrm{Vect}(A) + \mathrm{Vect}(B) \subset \mathrm{Vect}(A \cup B).$$

Réciproquement, si $x \in \mathrm{Vect}(A \cup B)$, alors x est combinaison linéaire d'éléments de $A \cup B$, et peut donc s'écrire comme somme de combinaison linéaire d'éléments de A, et combinaison linéaire d'éléments de B. D'où $x \in \mathrm{Vect}(A) + \mathrm{Vect}(B)$.

□

Exercice 1. Déterminer $E+F$ dans les deux cas suivants :

(1) $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = a + bx^2, a, b \in \mathbb{R}\}$ et $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = cx,\ c \in \mathbb{R}\}\}$. On donnera aussi des familles génératrices de E et F.

(2) E est un sous-espace vectoriel de F.

Exercice 2.

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+y+z = 0\}, \quad G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, z = 0\}$$

Trouver une famille génératrice de F, de G, de $F+G$. Déterminer $F+G$, $F \cap G$.

Définition 1.8 (Somme directe de sous-espaces vectoriels)**.** La somme de deux sous-espaces vectoriels F et G de E est dite **directe** si tout élément de la somme se décompose *de manière unique* sur F et G, c'est-à-dire :

$$\forall z \in F+G, \quad \exists!(x,y) \in F \times G, \quad z = x+y.$$

Lorsque la somme $F+G$ est directe, on notera $F \oplus G$ au lieu de $F+G$.

Plus généralement, la somme de p sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_p$ de E est **directe** si tout vecteur de $F_1 + \ldots + F_p$ s'écrit *de manière unique* comme somme d'éléments de F_k, $1 \leq k \leq p$:

$$\forall (x_1, \ldots, x_p),\ (y_1 \cdots, \ldots y_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p, x_1 + \cdots + x_p = y_1 + \cdots + y_p \Rightarrow x_i = y_i \ \forall\, 1 \leq i \leq k$$

ou encore

$$\forall (x_1, \ldots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p, x_1 + \cdots + x_p = 0 \Rightarrow x_i = 0 \ \forall\ 1 \leq i \leq k.$$

On notera alors $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} F_i$ au lieu de $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} F_i$.

Théorème 1.3. *Les sous-espaces F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$.*

Démonstration. Supposons que F et G sont en somme directe et soit $x \in F \cap G$. On a alors les décompositions $x = 0 + x = x + 0$ de x sur $F + G$. Par unicité, il vient $x = 0$. Réciproquement supposons $F \cap G = \{0\}$. Soit $z \in F + G$ avec les décompositions $z = x + y = x' + y'$ telles que $x, x' \in F$ et $y, y' \in G$. On a alors $x - x' = y - y' \in F \cap G$. D'où $x = x'$ et $y = y'$ et l'unicité de la décomposition. □

Théorème 1.4. *Soit p sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_p$ de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) $F_1, \dots, F_p$ sont en somme directe ;

(2) Pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $F_i \cap \left(\sum_{j \neq i} F_j \right) = \{0\}$.

Exercice 3.
1. Les sous-espaces vectoriels F et G de l'exercice précédent sont-ils en somme directe ?
2. Dans $\mathbb{R}^3$ montrer que les sous-espaces vectoriels
$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0, x = 0\}, \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = 0\}$$
sont en somme directe.

Exercice 4.
1. Donner trois façons d'écrire $\mathbb{R}_2[X]$ comme somme directe de 2 sous-espaces vectoriels non triviaux.
2. Donner six façons d'écrire $\mathbb{R}_3[X]$ comme somme directe de 3 sous-espaces vectoriels non triviaux.
3. Donner dix façons d'écrire $\mathbb{R}_3[X]$ comme somme directe de 2 sous-espaces vectoriels non triviaux.

Définition 1.9 (Espaces supplémentaires)**.** Les sous-espaces F et G de E sont **supplémentaires** si $E = F \oplus G$.

Par l'axiome du choix, tout sous-espace vectoriel a un supplémentaire. Mais il n'est pas unique si le sous espace est strict.

Exemple 1.5.
1. Représenter $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ à l'aide de sous-espaces supplémentaires.
2. $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$.
3. $E \times F = E \times \{0\} \oplus \{0\} \times F$.
4. Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace de toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{F}_a$ le sous-espace des fonctions nulles au point a, et $\mathcal{F}_C$ le sous-espace des fonctions constantes. Montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{F}_a \oplus \mathcal{F}_C$.

Exercice 5. Les sous-espaces vectoriels
$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0, x = 0\}, \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = 0\}$$
sont-ils supplémentaires ?

Exercice 6. – Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. On considère les sous-espaces vectoriels suivants de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: $U = \text{Vect}(1, \cos 2x, \cos 4x)$, $V = \text{Vect}(1, \cos^2 x)$ et $W = \text{Vect}(\cos^4 x)$. Montrer que $U = V \oplus W$.
2. Soit $P = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ paire}\}$ et $I = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ impaire}\}$. Montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = P \oplus I$.

Exercice 7. – Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P'(1) = 0\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid \deg P \leq 1\}$.

1. Montrer que $\mathbb{R}_3[X] = F \oplus G$.
2. Donner une méthode pour trouver la décomposition de tout polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ suivant cette somme directe.

1.5 Familles libres, familles génératrices, bases

Définition 1.10. Soit $\{u_i\}_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E. On dit que cette famille est **génératrice** lorsque $\text{Vect}(u_i)_{i \in I} = E$.
De même une partie $A \subset E$ est **génératrice** si $\text{Vect}(A) = E$.

Définition 1.11. Soit E un espace vectoriel et $u_1, \ldots, u_n \in E$.

1. On dit que la famille finie $(u_1, \ldots, u_n)$ est **liée** si et seulement si :

$$\exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in K^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0.$$

2. On dit que la famille finie $(u_1, \ldots, u_n)$ est **libre** si et seulement si elle n'est pas liée, c'est-à-dire :

$$\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in K^n, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

Autrement dit, la famille est liée lorsqu'il existe une combinaison linéaire non triviale (au moins 1 des coefficients est non nul) donne 0. Elle est libre lorsque seule la combinaison linéaire triviale donne 0.

Définition 1.12. Soit $\{u_i\}_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E (éventuellement infinie). Cette famille est dite **liée** lorsqu'il existe une sous-famille $\{u_i\}_{i \in J}$ (avec $J \subset I$ fini) qui soit liée. Elle dite **libre** lorsque toutes ses sous-familles finies sont libres.
On définit de manière analogue des parties $A \subset E$ liées ou libres.

Définition 1.13. Les éléments d'une famille libre sont dits **linéairement indépendants**.
Les éléments d'une famille liée sont dits **linéairement dépendants**.
Deux éléments non nuls d'une famille liée sont dits **colinéaires**.

Remarque 1.3. Pour savoir si une famille $(u_1, \ldots, u_p) \in \mathbb{R}^n$ est génératrice, on résout l'équation d'inconnue (λ_1, λ_p), $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i = x$, pour tout x de $\mathbb{R}^n$. Si la famille n'est pas génératrice, l'équation n'a pas toujours de solution, et la CNS sur x sous laquelle il y en a fournit une représentation cartésienne de $\text{Vect}(\{u_i\})$.

Remarque 1.4. Si I est fini, et les vecteurs u_i sont tous non nuls,

$$\{u_i\}_{i\in I} \text{ est libre si et seulement si } \mathrm{Vect}(\{u_i\}_{:i\in I}) = \bigoplus_{i\in I} \mathrm{Vect}(\{u_i\}).$$

Si $\{u_i\}_{i\in I}$ est libre, alors, pour tout vecteur x de E qui est combinaison linéaire des u_i, il existe une unique famille de coefficients $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ telle que $x = \sum_{i\in I} \lambda_i u_i$. Cette famille permet de définir l'application qui à un vecteur de $\mathrm{Vect}(\{u_i : i \in I\}$ associe ses coordonnées dans la famille $\{u_i\}_{i\in I}$. C'est une bijection de $\mathrm{Vect}(\{u_i\}_{:i\in I}$ sur $\mathbb{K}^I$.

Exemple 1.6.

1. Dans $\mathbb{R}^2$ les vecteurs $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ forment une famille libre.
2. Dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ forment une famille libre. Les vecteurs $e_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ forment une famille liée.
3. Dans $\mathbb{R}^2[X]$ les polynômes 1 et x forment une famille libre, les polynômes 1, x, $2x + 3$ forment une famille liée.

Théorème 1.5. *Une famille est liée si et seulement si un de ses éléments est combinaison linéaire des autres.*

Définition 1.14. On appelle **base** de E toute famille libre et génératrice de vecteurs de E.

Théorème 1.6. *Si $\mathcal{B}$ est une base de E, alors tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$. Si $\mathcal{B}$ est finie et $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_p\}$, alors*

$$E = \oplus_{i=1}^{p} \mathrm{Vect}(\{e_i\}).$$

*Pour tout $u \in E$, il existe donc $(\lambda_1, \ldots,$
$lambda_p) \in K^n$ tel que*

$$u = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i.$$

Les scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ s'appelent les ***coordonnées*** *de u dans la base $\mathcal{B}$.*

Ainsi, une fois qu'on s'est donné une base de E, un vecteur est entièrement déterminé par la donnée de ses coordonnées.

Remarque 1.5 (hors programme)**.** On peut montrer avec l'axiome du choix que dans tout espace vectoriel, il existe une base.

Exemple 1.7. $\{1, X, \ldots, X^n\}$ forme une base de $\mathbb{R}^n[X]$. Qu'en est-il de $\{1, (X - a_1), (X - a_1)(X - a_2), \ldots, (X - a_1)\cdots(X - a_n)\}$. Même question pour $\mathbb{R}[X]$.

Chapitre 2

Espaces vectoriels de dimension finie

2.1 Dimension

Définition 2.1. On appelle espace vectoriel **de dimension finie** tout espace vectoriel admettant une famille génératrice finie. Sinon, l'espace est dit **de dimension infinie**.

Le théorème suivant affirme que tout espace vectoriel de dimension finie possède une base.

Théorème 2.1. *(Base incomplète) Soit E un espace vectoriel non nul de dimension finie sur K. Soit G une famille génératrice finie de E, et soit $L \subset G$ une sous famille libre. Il existe une base B de E telle que $L \subset B \subset G$.*

Corollaire 2.1. *Sous les hypothèses du théorème, il existe toujours $B \subset G$ qui soit une base de E.*

Démonstration. Il suffit de remarquer qu'il existe bien $L \subset G$ qui soit libre. Mais puisque E n'est pas nul, il en va de même de G, et on peut alors choisir $L = \{u\}$ avec $u \in G \setminus \{0\}$. □

Corollaire 2.2. *Soit $(e_1, \ldots, e_k)$ une famille libre de vecteurs d'un espace vectoriel de dimension finie E. Il existe des vecteurs $e_{k+1}, \ldots, e_n$ tels que $e_1, \ldots, e_n$ est une base de E.*

Démonstration. Il suffit pour le voir d'appliquer le théorème de la base incomplète aux familles $L = \{e_1, \ldots, e_k\}$ et $L \cup G$, où G est une famille génératrice quelconque de E.

□

Lemme 2.1. Soit $(u_1, \ldots, u_{n+1}) \in E^{n+1}$, $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ et $\mathcal{F}' = (u_1, \ldots, u_{n+1})$.

1. Si $\mathcal{F}$ est libre et si $u_{n+1} \notin \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$, alors $\mathcal{F}'$ est libre.
2. Si $\mathcal{F}'$ est génératrice et si $u_{n+1} \in \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$, alors $\mathcal{F}$ est génératrice.

Démonstration. 1. Pour montrer que $\mathcal{F}'$ est libre, on considère des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ tels que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i u_i = 0$. Si $\lambda_{n+1} \neq 0$, on a alors $u_{n+1} = -\lambda_{n+1}^{-1} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \in \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$, ce qui est absurde. Donc $\lambda_{n+1} = 0$ puis $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0$ et donc $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ car $\mathcal{F}$ est libre.

2. Soit $u \in E$. Puisque $\mathcal{F}'$ est génératrice, u est combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_{n+1}$. Mais puisque $u_{n+1} \in \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$, u_{n+1} est combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_n$, on a que u est combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_n$, et donc $\mathcal{F}$ est génératrice.

□

Preuve du théorème de la base incomplète. On construit à partir de L une suite strictement croissante de familles libres de E.

Traitons d'abord le cas où L est réduite à un vecteur u_1, ce qui permet de construire une base en partant d'un des vecteurs générateurs. Supposons construite une partie libre $L_k = \{u_1, \ldots, u_k\} \subset G$ avec $k \geq 1$ (c'est vérifié pour $k = 1$). Si L_k est génératrice, on a fini. Sinon, d'après le Lemme (2.), il existe $u_{k+1} \in G$ tel que $u_{k+1} \notin \mathrm{Vect}(L_k)$. Donc, d'après le Lemme (1.) $L_{k+1} = L_k \cup \{u_{k+1}\}$ est une partie libre incluse dans G. On construit ainsi une suite strictement croissante de parties libres tant que L_k n'engendre pas E. Le processus s'arrête en temps fini puisque $L_k \subset G$ et G est fini. Il exists donc $k_0 \leq \#G$ tel que $L = L_1 \subset L_{k_0} \subset G$ et L_{k_0} soit libre et génératrice.

Si l'on part d'une famille libre $L = \{u_1, \ldots, u_{k_0}\} \subset G$ quelconque, on procède de la même façon. si L est déjà génératrice, il n'y a rien à faire. Sinon on complète par récurrence.

Proposition 2.1. *Soit E un espace vectoriel et F une famille de n vecteurs. Alors toute famille de $n+1$ vecteurs de* $\mathrm{Vect}(F)$ *est liée.*

Démonstration. On procède par récurrence sur n. La propriété est vraie pour 0, puisqu'une combinaison linéaire de 0 est nulle.

On suppose la propriété vraie au rang $n-1$, on cherche à la démontrer au rang n. Pour cela, on note $F = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Soit alors $G = \{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ une famille de $n+1$ vecteurs de $\mathrm{Vect}(F)$.

Par hypothèse, x_k est combinaison linéaire des e_i. Pour une telle combinaison linéaire, notons α_k le coefficient de e_n.

— Si tous les α_k sont nuls, cela signifie que les x_k sont des combinaisons linéaires des $e_1, \ldots, e_{n-1}$ uniquement. D'après l'hypothèse de récurrence au rang $n-1$, la famille G est donc liée.

— Si l'un des α_k est non nul, quitte à permuter les x_k, on peut supposer que $k = 1$. On pose alors
$$y_k = x_k - \frac{\alpha_k}{\alpha_1} x_1.$$
La famille $y_2, \ldots, y_{n+1}$ est combinaison linéaire des $e_1, \ldots, e_{n-1}$ uniquement, puisque le coefficient selon e_n s'annule par construction. C'est donc une famille liée par l'hypothèse de récurrence, et il existe des nombres $\lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$ qui ne sont pas tous nuls tels que
$$\sum_{k=2}^{n+1} \lambda_k y_k = 0.$$

En remplaçant par les valeurs de y_k, on trouve donc

$$\sum_{k=2}^{n+1} \lambda_k x_k - \sum_{k=2}^{n+1} \lambda_k \frac{\alpha_k}{\alpha_1} x_1 = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k$$

avec $\lambda_1 \overset{\text{def}}{=} -\sum_{k=2}^{n+1} \lambda_k \frac{\alpha_k}{\alpha_1}$. Mais comme au moins un des λ_k est non nul, ceci montre que la famille $x_1, \ldots, x_{n+1}$ est bien liée, ce qu'il fallait démontrer.

□

De cette proposition, on déduit l'observation fondamentale suivante : si $v_1, \ldots, v_q$ est une famille génératrice de E et si $x_1, \ldots, x_p$ est une famille libre de E, alors forcément, $p \leq q$. En effet, il suffit de prendre $F = (v_1, \ldots, v_q)$, $G = (x_1, \ldots, x_p)$ et d'appliquer la proposition précédente. Ceci permet d'établir le résultat fondamental suivant :

Théorème 2.2. *Soit E un espace vectoriel non nul de dimension finie sur K. Toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments. Ce nombre est appelé la* ***dimension*** *de E et est noté en général $\dim_K E$ (ou $\dim E$ s'il n'y a pas ambiguïté). Si $E = \{0\}$, on convient que $\dim_K E = 0$. Si E est de dimension infinie, on note $\dim_K E = \infty$.*

Démonstration. Soient B_1, B_2 deux bases de E. Puisque B_1 est génératrice et B_2 est libre, l'observation ci-dessus montre que $\operatorname{Card} B_2 \leq \operatorname{Card} B_1$. En échangeant le rôle de B_1 et B_2, on obtient $\operatorname{Card} B_1 \leq \operatorname{Card} B_2$, et donc $\operatorname{Card} B_2 = \operatorname{Card} B_1$. □

Corollaire 2.3. *Dans un espace vectoriel de dimension n, toute famille de plus de n vecteurs est liée (et toute famille libre a au plus n vecteurs).*

Corollaire 2.4. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, et soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille de n vecteurs. On a équivalence entre :*

1. *$(v_1, \ldots, v_n)$ est une base de E,*
2. *$(v_1, \ldots, v_n)$ est une famille libre,*
3. *$(v_1, \ldots, v_n)$ est une famille génératrice.*

Exercice 8.

1. Quelle est la dimension de $\mathbb{C}$ espace vectoriel sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$?
2. Quelle est la dimension de $\mathbb{K}^n$?
3. Quelle est la dimension de $\mathbb{C}_n[X]$ sur $\mathbb{R}$? Sur $\mathbb{C}$?
4. Quelle est la dimension de $E \times F$? (détailler)

2.2 Sous-espaces vectoriels

Proposition 2.2. *Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E. Alors, F est de dimension finie, et $\dim(F) \leq \dim(E)$. De plus, on a $\dim(F) = \dim(E) \iff F = E$.*

Démonstration. F ne peut contenir de famille libre infinie, sinon il en irait de même de E, qui contiendrait alors des sous-espaces des familles libres de cardinal supérieur à sa dimension. En appliquant le corollaire 2.2, on aurait alors une contradiction. On voit alors que F est de dimension finie, et que toute base de F peut être complétée en une base de E, donc $\dim(F) = \dim(E) \iff F = E$. □

Définition 2.2. Soit E un espace vectoriel.

1. On appelle **droite vectorielle** (ou simplement droite dans ce cours) tout sous-espace vectoriel de E de dimension 1.
2. On appelle **plan vectoriel** (ou simplement droite dans ce cours) tout sous-espace vectoriel de E de dimension 2.
3. On appelle **hyperplan** de E tout sous-espace vectoriel H de E tel qu'il existe une droite D de E telle que $E = H \oplus D$. Si E est de dimension finie n, il est équivalement de dire que $\dim H = n - 1$.

Proposition 2.3. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Tout sous-espace vectoriel F de E admet au moins un supplémentaire G dans E et*

$$E = F \oplus G \Rightarrow \dim(E) = \dim(F) + \dim(G).$$

Si F et G sont deux sous-espaces de E en somme directe, i.e. $F \oplus G$, alors $\dim F + G = \dim(F) + \dim(G)$*. Plus généralement, si les E_k sont des sev de E en somme directe, $\oplus_{i=1}^k E_k$, alors* $\dim \oplus_{i=1}^k E_k = \sum_{i=1}^k \dim E_k$.

Démonstration. F est de dimension finie, donc admet une base $(u_1, \ldots, u_n)$. D'après le théorème de la base incomplète, il existe $u_{n+1}, \ldots, u_{n+p}$ tels que $(u_1, \ldots, u_{n+p})$ soit une base de E. Alors, $G = \mathrm{Vect}(u_{n+1}, \ldots, u_{n+p})$ est un supplémentaire de F.
De plus, si F et G sont deux sous-espaces vectoriels tels que $E = F \oplus G$, alors en notant B_F une base de F et B_G une base de G, on voit que $B = B_F \cup B_G$ est une base de E et donc $\dim(E) = \mathrm{Card}(B_F \cup B_G) = \mathrm{Card}(B_F) + \mathrm{Card}(B_G) = \dim(F) + \dim(G)$ car $B_F \cap B_G = \emptyset$. □

Remarque 2.1. On verra plus tard que plus généralement, si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Exercice 9. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace F engendré par (a, b, c) et le sous-espace G engendré par (d, e).

$$a = (1, 2, 3, 4),\ b = (1, 1, 1, 3),\ c = (0, 1, 2, 2),\ d = (1, 0, -1, 2),\ e = (2, 3, 0, 1)$$

Déterminer les dimensions de $F, G, F \cap G, F + G$ et des bases de ces sous-espaces, et des représentations cartésiennes (on cherchera d'abord une base de $F \cap G$).

2.3 Rang d'un système de vecteurs

On emploie le terme ≪ système de vecteurs ≫ de manière synonyme à ≪ famille de vecteurs ≫.

Définition 2.3 (Rang)**.** On appelle rang d'un système de vecteurs $\mathcal{F}$ la dimension du sous-espace vectoriel, supposé de dimension finie, engendré par ce système. On notera $\mathrm{rg}(\mathcal{F})$ le rang du système $\mathcal{F}$.

C'est donc le nombre maximal de vecteurs indépendants dans $\mathcal{F}$. Dans les sections suivantes, nous allons introduire des méthodes pour calculer le rang d'une famille de vecteurs.

2.3.1 Opérations élémentaires sur une famille de vecteurs.

Soit $\mathcal{F} = (v_1, \ldots, v_n)$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On note comme d'habitude $\mathrm{Vect}\,\mathcal{F}$ l'espace vectoriel engendré par la famille $\mathcal{F}$. D'après ce qui précède, nous savons que $\mathrm{Vect}\,\mathcal{F}$ est de dimension au plus n (si la famille $\mathcal{F}$ est libre), autrement dit :

$$\mathrm{rg}(\mathcal{F}) \leq n.$$

On considère les *opérations élémentaires* suivantes sur la famille $\mathcal{F}$:

• O_1 : pour un indice i donné, on ajoute à v_i une combinaison linéaire quelconque des *autres* vecteurs. Autrement dit, on remplace v_i par le vecteur w_i donné par :

$$w_i \overset{\text{def}}{=} v_i + \sum_{1 \leq j \leq n,\ j \neq i} \alpha_j v_j, \qquad \alpha_j \in \mathbb{K}.$$

• O_2 : pour un indice i donné, on multiplie v_i par un scalaire $\lambda \neq 0$. Autrement dit, on remplace v_i par le vecteur w_i donné par :

$$w_i = \lambda v_i.$$

• O_3 : pour deux indices i, j distincts, on échange les vecteurs d'indice i et j, c'est à dire qu'on remplace respectivement v_i et v_j par les vecteurs w_i et w_j donnés par

$$w_i = v_j \quad \text{et} \quad w_j = v_i.$$

On a la proposition fondamentale suivante :

Proposition 2.4. *Notons $\mathcal{F}'$ la nouvelle famille obtenue après avoir effectué une des opérations élémentaires ci-dessus. Alors*

$$\mathrm{Vect}\,\mathcal{F}' = \mathrm{Vect}\,\mathcal{F}.$$

En particulier, $\mathrm{rg}\,\mathcal{F} = \mathrm{rg}\,\mathcal{F}'$.

Démonstration. Considérons la première opération O_1 sur le vecteur v_i, et notons $\mathcal{F}'$ la famille obtenue en remplaçant v_i par w_i dans la famille $\mathcal{F}$. Il est clair que toute combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{F}'$ est une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$, puisque w_i est lui-même combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{F}$. Donc $\mathrm{Vect}\,\mathcal{F}' \subset \mathrm{Vect}\,\mathcal{F}$. Pour montrer l'inclusion inverse, soit $v \in \mathrm{Vect}\,\mathcal{F}$: alors il existe des scalaires a_j tels que

$$v = \sum_{1 \leq j \leq n} a_j v_j = a_i v_i + \sum_{1 \leq j \leq n,\ j \neq i} a_j v_j.$$

D'après la formule définissant la première opération O_1, on a

$$v_i = w_i - \sum_{1 \leq j \leq n,\ j \neq i} \alpha_j v_j.$$

En remplaçant cette expression dans v, on obtient donc

$$v = a_i w_i - a_i \sum_{1 \le j \le n,\ j \ne i} \alpha_j v_j + \sum_{1 \le j \le n,\ j \ne i} a_j v_j = a_i w_i + \sum_{1 \le j \le n,\ j \ne i} (a_j - a_i \alpha_j) v_j.$$

Cette dernière expression est une combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{F}'$, et donc $v \in \operatorname{Vect} \mathcal{F}'$ et $\operatorname{Vect} \mathcal{F} \subset \operatorname{Vect} \mathcal{F}'$. Finalement, on a bien $\operatorname{Vect} \mathcal{F} = \operatorname{Vect} \mathcal{F}'$.

On passe maintenant à l'opération O_2 sur le vecteur v_i. Notons encore $\mathcal{F}'$ la famille obtenue en remplaçant v_i par w_i dans la famille $\mathcal{F}$. Soit $v \in \operatorname{Vect} \mathcal{F}$. Il suffit d'écrire

$$v = a_1 v_1 + \cdots + \frac{a_i}{\lambda} \underbrace{\lambda v_i}_{w_i} + \cdots + a_n v_n$$

pour établir que $\operatorname{Vect} \mathcal{F} \subset \operatorname{Vect} \mathcal{F}'$. On notera l'utilisation de l'hypothèse $\lambda \ne 0$. Pour l'inclusion inverse, il suffit d'écrire $w_i = \lambda v_i$ pour voir que toute combinaison linéaire de $\mathcal{F}'$ est une combinaison linéaire de $\mathcal{F}$.

Enfin, pour la dernière opération O_3, le résultat est évident car la somme est commutative dans un espace vectoriel : échanger les vecteurs i et j revient, dans une combinaison linéaire, à échanger l'ordre des termes de la somme faisant intervenir i et j.

Deux espaces vectoriels égaux ont la même dimension d'après ce que nous avons vu au début du chapitre, donc les familles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ ont le même rang par définition. □

Cette proposition a deux conséquences importantes :

Corollaire 2.5. *Soit $\mathcal{F}'$ la famille obtenue de $\mathcal{F}$ après un nombre fini quelconque d'opérations élémentaires. Alors :*

1. $\operatorname{Vect} \mathcal{F} = \operatorname{Vect} \mathcal{F}'$, *en particulier* $\operatorname{rg} \mathcal{F} = \operatorname{rg} \mathcal{F}'$.
2. *$\mathcal{F}$ est libre si et seulement si $\mathcal{F}'$ est libre.*

Démonstration. 1. Il suffit de raisonner par récurrence sur le nombre d'opération, puisqu'à chaque étape, l'espace vectoriel engendré par la nouvelle famille est inchangé.

2. Comme ci-dessus, il suffit de démontrer la propriété pour une seule opération, et d'étendre le résultat par une récurrence évidente sur le nombre d'opérations. Supposons donc que $\mathcal{F}$ est libre, et soit $\mathcal{F}'$ la famille obtenue après une opération élémentaire. On a donc $\dim \operatorname{Vect} \mathcal{F} = n$. Puisque $\operatorname{Vect} \mathcal{F}' = \operatorname{Vect} \mathcal{F}$, on a aussi $\dim \operatorname{Vect} \mathcal{F}' = n$. La famille $\mathcal{F}'$ est évidemment génératrice de $\operatorname{Vect} \mathcal{F}'$ et elle comprend n éléments, elle forme donc une base de $\operatorname{Vect} \mathcal{F}'$ d'après le corollaire 2.4. C'est bien une famille libre.

Le raisonnement est le même pour l'implication inverse : si $\mathcal{F}'$ est libre, elle engendre un espace de dimension n car elle contient n vecteurs. Cet espace est aussi engendré par les n vecteurs de $\mathcal{F}$ puisque $\operatorname{Vect} \mathcal{F}' = \operatorname{Vect} \mathcal{F}$. En utilisant encore le corollaire 2.4, $\mathcal{F}$ en est une base, qui est donc libre.

□

Nous allons maintenant voir quelques méthodes permettant de calculer plus aisément le rang d'un système de vecteurs.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, et $S = \{v_1, \dots, v_p\}$ un système de vecteurs. On se donne une base $\{a_1, \dots, a_n\}$ de E. Décomposons les v_i sur la base des a_i :

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_i^j a_j.$$

Écrivons le système S sous forme de vecteurs colonne :

$$v_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} \\ \alpha_{2,1} \\ \vdots \\ \alpha_{n,1} \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,2} \\ \vdots \\ \alpha_{n,2} \end{pmatrix}, \dots, v_p = \begin{pmatrix} \alpha_{1,p} \\ \alpha_{2,p} \\ \vdots \\ \alpha_{n,p} \end{pmatrix}.$$

Définition 2.4. Pour un vecteur colonne

$$v = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

on dit que α_i est l'élément de tête si α_i est non nul et tous les éléments α_j avec $j < i$ sont nuls.

Remarque 2.2. En d'autres termes, l'élément de tête est le premier élément non nul du vecteur quand on le lit de haut en bas.

Définition 2.5. On dit qu'un système de vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} \\ \alpha_{2,1} \\ \vdots \\ \alpha_{n,1} \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,2} \\ \vdots \\ \alpha_{n,2} \end{pmatrix}, \dots, v_p = \begin{pmatrix} \alpha_{1,p} \\ \alpha_{2,p} \\ \vdots \\ \alpha_{n,p} \end{pmatrix}.$$

est sous forme échelonnée si tous les vecteurs sont non nuls et si la condition suivante est vérifiée :

Pour tout i compris entre 1 et $p-1$, l'élément de tête de v_{i+1} est à un indice strictement plus élevé que l'élément de tête de v_i.

Exemple 2.1. Les familles suivantes sont sous forme échelonnée

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

Les familles suivantes ne le sont pas

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

La première car elle contient un vecteur nul, la seconde et la troisième car les éléments de tête ne satisfont pas la condition requise.

La méthode repose alors sur l'observation suivante :

Proposition 2.5. *Supposons que le système S soit sous forme échelonnée. Alors les vecteurs de S forment une famille libre.*

Démonstration. Exercice : Montrer en résolvant un système que la famille S est libre. □

Pour déterminer le rang d'un système de p vecteurs dans un espace de dimension n, on peut donc s'aider de ce qui précède : si l'on connaît leurs coordonnées dans une base, on les écrit en colonne, puis on effectue des opérations élémentaires afin de mettre le système sous forme échelonnée, en laissant tomber les vecteurs nuls qui pourraient apparaître. Le rang du système initial est donc le nombre de vecteur non nuls restants quand le système est sous forme échelonnée. Un algorithme appellé algorithme du pivot de Gauss affirme qu'il est toujours possible de mettre une famille de vecteurs colonne de K^n sous forme échelonnée.

Exemple 2.2. Considérons la famille suivante de vecteurs de $\mathbb{R}^4$

$$\mathcal{F} = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

On commence par faire les opérations élémentaires suivantes :

1. On remplace v_2 par $v_2 - 2v_1$.
2. On remplace v_3 par $v_3 - 3v_1$.

On obtient alors la famille

$$\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

On fait alors l'opération de remplacer w_3 par $w_3 - w_2$. On obtient la famille

$$\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, z_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

On peut alors laisser tomber z_3 qui est nul et on obtient une famille sous forme échelonnée. On a donc trouvé une famille libre $\{v_1, w_2\}$ qui engendre le même espace que $\mathcal{F}$. Le rang de $\mathcal{F}$ est donc 2.

Chapitre 3

Applications linéaires

3.1 Définitions et exemples

Définition 3.1. Soient E et F deux espaces vectoriels sur un même corps commutatif K .

- Une **application linéaire** (ou **homomorphisme**) de E dans F est une application u de E dans F telle que
  (a) $\forall (x,y) \in E^2,\ u(x+y) = u(x) + u(y)$,
  (b) $\forall x \in E, \forall \lambda \in K,\ u(\lambda x) = \lambda u(x)$,
- Si $F = E$, on dit que u est un **endomorphisme** de E.
- Si $F = K$, on dit que u est une **forme linéaire** sur E.
- Un **isomorphisme** est une application linéaire bijective.
- Un **automorphisme** est un endomorphisme bijectif.

Notation 3.1.
- On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.
- On note $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E,E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
- On note $E^* = \mathcal{L}(E,K)$ l'ensemble des formes linéaires sur E. Cet ensemble s'appelle le **dual** (algébrique) de E.
- On note $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E. Cet ensemble s'appelle le **groupe linéaire** de E

Remarque 3.1. Une application $u : E \to F$ est linéaire si et seulement si

$$\forall \lambda \in K,\ \forall x,y \in E,\ u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y).$$

Remarque 3.2. Si $u \in \mathcal{L}(E,F)$, on a toujours $u(0) = 0$ (prendre $\lambda = 0$ dans (b)).

Remarque 3.3.
1. Le composé de deux homomorphismes est un homomorphisme.
2. Si u est un isomorphisme, u^{-1} en est également un.

Remarque 3.4. Un homomorphisme est entièrement déterminé par sa donnée sur une famille génératrice. On peut ainsi représenter aisément u si l'on connaît une base de l'espace de départ et une base de l'espace d'arrivée.
Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et soit $(e_i)_{i \in I}$ une base de E. Tout vecteur x de E s'écrit de façon unique $x = \sum_{i \in I'} x_i e_i$ avec I' fini. On a alors :

$$u(x) = u\left(\sum_{i \in I'} x_i e_i\right) = \sum_{i \in I'} x_i u(e_i).$$

Donc, si l'on connait $u(e_i)$ pour tout $i \in I$, alors on connait u sur E tout entier. De plus, si $(f_j)_{j \in J}$ est une base de F, tous les vecteurs $u(e_i)$ s'écrivent de façon unique $u(e_i) = \sum_{j \in J'} y_{i,j} e_j$ avec J' fini. On obtient alors :

$$u(x) = \sum_{i \in I'} x_i u(e_i) = \sum_{(i,j) \in I' \times J'} y_{i,j} u(e_j)$$

Ainsi, si on se fixe des bases B et B' de E et F, u est caractérisé par la donnée de la famille $(y_{i,j})_{i,j}$. Lorsque E et F sont de dimension finie, on appelera cette famille la **matrice** de u dans les bases B et B' (cf Chapitre 5).

Proposition 3.1. *L'image d'un sous-espace vectoriel est un sous-espace vectoriel, l'image réciproque d'un sous-espace vectoriel est un sous-espace vectoriel.*

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Si A est un sous espace vectoriel de E, on rappelle que l'image de A par u est

$$u(A) = \{y \in F, \exists\, x \in A, y = u(x)\} = \{u(x), x \in A\}.$$

$0 \in u(A)$ car $u(0) = 0$. Soit $y, y' \in u(A)$ et $\lambda \in K$. Alors il existe $x, x' \in A$ tels que $y = u(x)$ et $y' = u(x')$. Par linéarité, $\lambda y + y' = \lambda u(x) + u(x') = u(\lambda x + x') \in u(A)$ car $\lambda x + x' \in A$ (puisque A est un sous-espace vectoriel de E). D'où $u(A) \in \mathcal{F}$).
Soit maintenant B un sous-espace vectoriel de F. Par définition :

$$u^{-1}(B) = \{x \in E, u(x) \in B\}.$$

$0 \in u^{-1}(B)$ car $u(0) = 0$. Soit $x, x' \in u^{-1}(B)$ et $\lambda \in K$. Alors $u(\lambda x + x') = \lambda y(x) + u(x') \in B$ car $u(x)$ et $u(x')$ sont dans B et B est un sous espace vectoriel. Donc $u^{-1}(B)$ est un sous-espace vectoriel de E. $\square$

En conséquence, on déduit le théorème suivant :

Théorème 3.1.
1. *Si u est un homomorphisme de E dans F, l'ensemble des éléments x de E tels que $u(x) = 0$ est un sous-espace vectoriel de E, appelé le noyau de u, et noté* $\ker u$ *:*

$$\ker(u) = \{x \in E, u(x) = 0\}$$

2. *Si u est un homomorphisme de E dans F, l'ensemble des éléments $u(x)$ pour $x \in E$ est un sous-espace vectoriel de F, appelé l' image de u, et noté* $\mathrm{Im}\, u$ *:*

$$\mathrm{Im}(u) = u(E) = \{u(x),\ x \in E\}.$$

Exemple 3.1.
1. Des exemples de la géométrie : l'identité et plus généralement toutes les homothéties vectorielles (non nulles) sont des automorphismes. Les symétries, rotations et similitudes vectorielles (non nulles) sont des automorphismes du plan ou de l'espace usuel.
2. Interpréter les hyperplans de $\mathbb{R}^n$ et leurs intersections comme des noyaux.
3. Définir une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ à l'aide des bases canoniques.
4. Dérivation d'une fonction. Trouver ses noyau et image.
5. Translation : à $x \mapsto f(x)$ fait correspondre $x \mapsto f(x+1)$.
6. Intégrale d'une fonction sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
7. $f \mapsto f(a)$. Trouver ses noyau et image.
8. Soit A un polynôme réel non nul. Montrer que l'application qui a un polynôme fait correspondre le reste de la division euclidienne par A est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$. Trouver ses noyaux et image.

Proposition 3.2. *Si E et F sont deux espaces vectoriels, $\mathcal{L}(E, F)$ est lui-même un espace vectoriel (pour les lois usuelles).*

Exercice 10. Soit $m, n \geq 1$. Alors, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ est de dimension nm. On commencera par des petite valeurs de m ou n.

Proposition 3.3. *Un homomorphisme est injectif si et seulement si son noyau est réduit à zéro.*

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ un homomorphisme. Alors :

$$\begin{aligned} u \text{ est injectif} &\iff \forall x, y \in E, u(x) = u(y) \Rightarrow x = y \\ &\iff \forall x, y \in E, u(x-y) = 0 \Rightarrow x - y = 0 \\ &\iff \forall x \in E, u(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \\ &\iff \ker(u) = \{0\}. \end{aligned}$$

□

3.2 Applications linéaires et familles de vecteurs

Proposition 3.4. *Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, et $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E. Alors :*

$$u(\mathrm{Vect}(\mathcal{F})) = \mathrm{Vect}(u(\mathcal{F})).$$

Démonstration. Soit $y \in u(\mathrm{Vect}(\mathcal{F}))$. Alors il existe $x \in \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ tel que $y = u(x)$, puis on peut écrire $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ avec $\lambda_i \in K$ et $x_i \in \mathcal{F}$. on a alors

$$y = u(x) = u\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i u(x_i) \in \mathrm{Vect}(u(\mathcal{F})).$$

L'autre inclusion se montre de la même façon. □

Théorème 3.2. *Soient E et F deux espaces vectoriels sur K, u un homomorphisme de E sur F. On a les propriétés suivantes :*

1. *si B est une famille génératrice dans E, $u(B)$ est génératrice dans $u(E)$,*
2. *si B est une famille liée dans E, $u(B)$ est liée dans F,*
3. *si $u(B)$ est libre dans F, B est libre dans E.*

Démonstration.
1. $\mathrm{Vect}(u(B)) = u(\mathrm{Vect}(B)) = u(E)$.
2. B est liée donc il existe $x_1, \dots, x_n \in B$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n \setminus \{0\}$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0$. On a alors
$$\sum_{i=1}^n \lambda_i u(x_i) = u\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) = u(0) = 0,$$
donc $u(B)$ est liée.
3. C'est la contraposée de 2).

□

Remarque 3.5. Attention l'image d'une famille libre n'est pas forcément libre.

Exercice 11. Soient E et F deux espaces vectoriels sur K, u un homomorphisme de E sur F. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. u injective,
2. pour toute famille libre B, $u(B)$ est libre,
3. Pour tous sous-espaces vectoriels F et G tels que $E = F \oplus G$, $u(E) = u(F) \oplus u(G)$.

Terminons cette section par une proposition importante qui récapitule certains faits que nous venons de voir.

Proposition 3.5. *Soient E, F des espaces vectoriels. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E, et $(v_1, \dots, v_n)$ une famille de F. Alors il existe un et un seul homomorphisme $u : E \to F$ tel que pour tout i, on a*
$$u(e_i) = v_i.$$
De plus, l'homomorphisme u est :
- *surjectif si et seulement la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est génératrice.*
- *injectif si et seulement si la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est libre.*
- *bijectif si et seulement si la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est une base de F. Dans ce cas, on a bien sûr* $\dim F = n$.

3.3 Le théorème d'isomorphisme

Définition 3.2. Deux espaces vectoriels E et F sont dits **isomorphes** s'il existe un isomorphisme de E dans F.

Remarque 3.6. La relation $\sim$: "est isomorphe à" est une relation d'équivalence :

1. $E \sim F \Longrightarrow F \sim E$,
2. $E \sim E$,
3. $E \sim F$ et $F \sim G \Longrightarrow E \sim G$.

Proposition 3.6. *Soit u un homomorphisme d'un espace vectoriel E dans un espace F. Soit $E_1 = \ker u$ et E_2 un supplémentaire de E_1 dans E. Alors u induit un isomorphisme de E_2 sur $\operatorname{Im} u$.*

Démonstration. Par restriction l'application linéaire u induit une application linéaire $\tilde{u}\colon E_2 \to \operatorname{Im} u$. Son noyau est $\ker \tilde{u} = \ker u \cap E_2 = \{0\}$. De plus, $\tilde{u}$ est surjective. En effet, pour tout $y \in \operatorname{Im} u$, il existe $x \in E$ tel que $u(x) = y$. On peut décomposer x en $x = x_1 + x_2$, où $x_1 \in \ker f$ et $x_2 \in E_2$. On a alors $y = u(x_2) = \tilde{u}(x_2)$. □

Théorème 3.3. *Deux espaces de dimension finie E et F sont isomorphes si et seulement si ils ont même dimension.*

Démonstration. Supposons E et F isomorphes et soit $u : E \to F$ un isomorphisme, et B une base de E. D'après le Théorème 3.2, $u(B)$ engendre $u(E) = F$ car u est surjectif. D'où $\dim(E) \leq \dim(F)$. D'autre part d'après l'exercice 11, $u(B)$ est libre (car u injectif). Donc c'est une base de F et $\dim(E) = \dim(F)$.
Réciproquement supposons E et F de même dimension n. On considère alors une base $B = (e_1, \ldots, e_n)$ de E et une base $B' = (f_1, \ldots, f_n)$ de F. On construit l'isomorphisme u recherché de la façon suivante : pour chaque $i \in \{1, \ldots, n\}$, on pose $u(e_i) = f_i$. Ceci définit parfaitement u : si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$, alors

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i.$$

En particulier si x est dans le noyau de u (c-à-d $u(x) = 0$) alors $x = 0$ car B' est libre. Donc u est injectif. De plus, si $y = \sum_{i=1}^n y_i f_i \in F$, alors $y = u\left(\sum_{i=1}^n y_i e_i\right)$, donc u est surjectif. □

3.4 Rang d'une application linéaire

Dans tout ce qui suit, E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie sur le même corps K.

Théorème et définition 3.1. *Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Alors $f(E)$ est de dimension finie sur K et $\dim_K f(E) \leq \dim_K E$. On appelle* ***rang*** *de f la dimension de l'image de f, et on le note $\operatorname{rg} f$.*

Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, le rang de f est le rang du système de vecteurs $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$.

Théorème 3.4 (théorème du rang)**.** *On a $\operatorname{rg}(f) = \dim(E) - \dim(\ker f)$. Autrement dit,*

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim(E).$$

Démonstration. Soit E' un supplémentaire dans E de $\ker f$. On a vu que f induit alors un isomorphisme entre $\mathrm{Im}\, f$ et E'. On a donc $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}\, f) = \dim(E) - \dim(\ker f)$. □

Remarque 3.7 (Lien avec le rang d'une famille de vecteurs)**.** Soit E un K-ev espace vectoriel de dimenion finie et $u_1, \dots u_p$ des vecteurs de E. Soit f l'application de $\mathbb{K}^p$ dans E définie par $f(\lambda_1, \dots, \lambda_p) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i$. C'est un homomorphisme. Le rang de $(u_1, \dots, u_p)$ est égal à $\mathrm{rg}(f)$. Donc trouver $\mathrm{rg}(u_1, \dots, u_p)$ est équivalent à déterminer la dimension du noyau de f, ce qui revient à résoudre un système linéaire.

Exercice 12. Les espaces suivants sont-ils isomorphes ? (1) $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^4$. (2) $\mathbb{R}_5[X]$ et $\mathbb{R}^5$. (3) $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$, $n, m \geq 1$.

Corollaire 3.1. *Soient E (de dimension n) et F (de dimension p) deux espaces vectoriels sur le même corps K.*

1. $\mathrm{rg}\, f \leq \inf(n, p)$,
2. $\mathrm{rg}\, f = n$ *si et seulement si* f *est injective,*
3. $\mathrm{rg}\, f = p$ *si et seulement si* f *est surjective.*

En particulier si f est surjective, on a $p \leq n$.

Corollaire 3.2. *Soit* $f : E \to F$ *une application linéaire, et supposons que* $\dim E = \dim F$*. On a alors équivalence entre*

1. f *est injective,*
2. f *est surjective,*
3. f *est bijective.*

Exercice 13. – Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On a

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Montrons le de deux façons.

1- On introduit F' et G' supplémentaires de $F \cap G$ respectivement dans F et G. Montrer que $F + G = F' \oplus G' \oplus F \cap G$.

2- Considérer l'application de $F \times G$ dans $F + G$, $(x, y) \mapsto x + y$. Montrer qu'elle est linéaire, déterminer son image et son noyau. Conclure.

3.5 Projections et symétries

Définition 3.3. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, la **projection** p sur F parallèlement à G est définie comme suit : si x se décompose en $y + z$ où y est dans F et z dans G, alors $p(x) = y$.

Remarque 3.8. Avec les mêmes notations, il est clair que $q : x \mapsto z$ (c'est-à-dire $q = Id_E - p$) est la projection sur G parallèlement à F

Théorème 3.5. *La projection sur F parallèlement à G est un endomorphisme. Son noyau est G, son image est F.*

Démonstration. Soit p la projection sur F parallèlement à G. Soit $x, x' \in E$ et $\lambda \in K$. Il existe $(y, z), (y', z') \in F \times G$ uniques tels que $x = y + z$ et $x' = y' + z'$. On a alors

$$p(\lambda x + x') = p((\lambda y + y') + (\lambda z + z')) = \lambda y + y' = \lambda p(x) + p(x').$$

Donc p est linéaire.De plus $p(x) = 0$ si et seulement si $y = 0$, si et seulement si $x = z \in G$, d'où $\mathrm{Ker}(p) = G$.
Par définition de p, on a $\mathrm{Im}(p) \subset F$. De plus, si $x \in F$ alors $x = x+0$ avec $(x, 0) \in F \times G$, d'où $x = p(x) \in F$. On en déduit que $\mathrm{Im}(p) = F$. □

Théorème 3.6. *Soit p un endomorphisme idempotent (c'est-à-dire que p satisfait l'équation $p \circ p = p$). Alors p est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.*

Démonstration. Montrons d'abord que $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont supplémentaires :

1. Soit $x \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p)$. Alors $p(x) = 0$ et il existe $y \in E$ tel que $x = p(y)$, d'où
$$0 = p(x) = p(p(y)) = p(y) = x.$$
D'où $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p) = \{0\}$.
2. Pour tout $x \in E$ on a la décomposition :
$$x = p(x) + (x - p(x)) \tag{3.1}$$
avec $p(x) \in \mathrm{Im}(p)$ et $x - p(x) \in \mathrm{Ker}(p)$ car $p(x - p(x)) = p(x) - p(p(x)) = p(x) - p(x) = 0$. On a donc bien $E = \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Im}(p)$.

Enfin la décomposition (3.1) montre que p est bien la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$. □

Remarque 3.9. D'après la décomposition (3.1), on a que $x \in \mathrm{Im}(p) \iff p(x) = x$. Autrement dit, $\mathrm{Im}(p)$ est l'ensemble des points fixes de p.

Définition 3.4. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, la symétrie s par rapport à F parallèlement à G est définie par $s = 2p - Id_E$ où p est la projection sur F parallèlement à G.

Remarque 3.10. Si $x = y + z$ avec $(y, z) \in F \times G$, alors on a $s(x) = y - z$.

Théorème 3.7. *La* ***symétrie*** *par rapport à F parallèlement à G est un isomorphisme.*

Démonstration. s est évidemment linéaire. De plus, puisque p et Id_E commutent,

$$s^2 = (2p - Id_E)^2 = 4p^2 + Id_E^2 - 4p = 4p + Id_E - 4p = Id_E.$$

Donc s est bijective et $s^{-1} = s$. □

Définition 3.5. Une **involution** est un endomorphisme s tel que $s^2 = Id_E$.

Théorème 3.8. *Soit s une involution. Alors s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - Id_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + Id_E)$.*

Démonstration. Posons $p = \frac{1}{2}(s + Id_E)$. Alors :

$$p^2 = \frac{1}{4}(s^2 + Id_E + 2s) = \frac{1}{4}(2s + 2Id_E) = p.$$

Donc p est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$. Ainsi, s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Ker}(s + Id_E)$. Enfin, on a :

$$x \in \mathrm{Ker}(s - Id_E) \iff s(x) - x = 0 \iff 2p(x) - x - x = 0 \iff p(x) = x \iff x \in \mathrm{Im}(p).$$

On a donc $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(s - Id_E)$. □

Exercice 14. On travaille dans $\mathbb{R}^2$. Soit $D_1 = Vect\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)$ et $D_2 = Vect\left(\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right)$.

(1) Vérifier que D_1 et D_2 sont supplémentaires.

(2) Donner l'expression de la projection sur D_1 parallèlement à D_2, et de la symétrie par rapport à D_1 parallèlement à D_2.

(3) Même question que (2) en échangeant les rôles de D_1 et D_2.

Exercice 15. – On considère dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, la droite vectorielle D engendrée par le vecteur $(-1, 1, 2)$, et l'ensemble $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y - z = 0\}$.

1- Montrer que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.

2- Déterminer l'expression de la projection sur P parallèlement à D. Faire de même pour la projection sur D parallèlement à P.

3- Déterminer l'expression de la symétrie par rapport à P parallèlement à D. Faire de même pour la symétrie par rapport à D parallèlement à P.

4- On adopte le point de vue inverse : à partir de l'expression analytique obtenue pour la projection sur P parallèlement à D, retrouver qu'il s'agit bien d'une projection.

Chapitre 4

Matrices. Résolution de systèmes linéaires

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

4.1 Matrices, opérations sur les matrices

4.1.1 Définition et règles de calcul

Définition 4.1. Soit $n \in \mathbb{N}_+$. Un vecteur colonne (resp. ligne à n composantes (ou coefficients) dans $\mathbb{K}$ est un tableau $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ (resp. $X = (x_1, \ldots, x_n)$). L'ensemble des vecteurs colonnes à n composantes se note $M_{n,1}(\mathbb{K})$, ou simplement $M_{n,1}$. L'ensemble des vecteurs lignes à n composantes se note $M_{1,n}(\mathbb{K})$, ou simplement $M_{1,n}$; c'est ensemble n'est autre que $\mathbb{K}^n$, et $M_{n,1}$ est clairement muni d'une structure d'espace vectoriel qui le rend isomorphe à $\mathbb{K}^n$. Notons que $M_{1,1}$ n'est autre que $\mathbb{K}$.

Les vecteurs colonnes $E^j = (\delta_{j',j})_{1 \le j \le n}$, $1 \le j \le n$ forment une base de $M_{n,1}$, et les vecteurs lignes $E_j = (\delta_{j',j})_{1 \le j \le n}$, $1 \le j \le n$ forment une base de $M_{1,n}$.

Définition 4.2. Soit $n, p \in \mathbb{N}_+$. Une matrice $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un tableau à n lignes et p colonnes

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} \ldots A_{1j} \ldots A_{1,p} \\ \vdots \\ A_{i1} \ldots A_{ij} \ldots A_{i,p} \\ \vdots \\ A_{n1} \ldots A_{nj} \ldots A_{n,p} \end{pmatrix} = (A_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}.$$

On note $M_{n,p}(\mathbb{K})$, ou simplement $M_{n,p}$ l'ensemble des matrices $n \times p$. Si $n = p$, on écrit $M_n(\mathbb{K})$ ou M_n.

Un vecteur colonne (resp. ligne) est donc est une matrice colonne (resp. ligne), i.e. à une colonne (resp. ligne).

On notera $C_j(A)$ la j-ième colonne de A et $L_i(A)$ la i-ième ligne de A.

Dans M_n, sont particulièrement importants l'ensemble des matrices diagonales :

$$D_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) : A_{i,j} = 0 \text{ si } i \neq j\},$$

l'ensemble des matrices triangulaires supérieures :

$$T_n(K) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) : A_{i,j} = 0 \text{ si } i > j\}$$

l'ensemble des matrices triangulaires inférieures :

$$\{A \in M_n(\mathbb{K}) : A_{i,j} = 0 \text{ si } i < j\},$$

l'ensemble des matrices symétriques :

$$S_n(K) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) : A_{i,j} = A_{i,j} \ \forall\ i, j\},$$

Proposition 4.1. *L'ensemble $M_{n,p}(\mathbb{K})$ est naturellement muni de l'addition interne : $A + B = (A_{ij} + B_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ et de la multiplication externe par les scalaires de $\mathbb{K}$: $\lambda \cdot A = \lambda A = (\lambda A_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$, qui en font un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension np.*

Définition 4.3. Soit $n \geq 1$. Pour $1 \leq i, j \leq n$ on définit $E_{i,j} = (\delta_{k,i}\delta_{l,j})_{\substack{1\leq k\leq n\\1\leq l\leq n}}$.

Exemple : $n = 3$, $E_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{3,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. En écrivant $A = \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} A_{ij}E_{i,j}$, on voit que $(E_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ est une base de $M_{n,p}$, on l'appelle la base canonique.

Définition 4.4. La transposée de $A \in M_{n,p}$ est la matrice de $M_{p,n}$ égale à $(A_{j,i})$ et notée ${}^tA$.

Proposition 4.2. *L'application $A \in M_{n,p} \mapsto {}^tA \in M_{p,n}$ est linéaire. Si $n = p$ c'est la symétrie par rapport aux matrices symétriques et parallèlement aux matrices anti-symétriques.*

Définition 4.5 (Multiplication d'un vecteur par une matrice.)**.** Soit $A \in M_{n,p}$.

1. Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in M_{p,1}$, AX est le vecteur colonne

$$\begin{pmatrix} {}^tA_1 \cdot X \\ \vdots \\ {}^tA_i \cdot X \\ \vdots \\ {}^tA_n \cdot X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^p A_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^p A_{ij}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^p A_{n,j}x_j \end{pmatrix} \in M_{n,1}.$$

L'application $f_A : X \in M_{p,1} \mapsto AX \in M_{n,1}$ est linéaire.

2. Si $X = (x_1 \dots, x_n) \in M_{1,n}$, XA est le vecteur ligne

$$^tX \cdot A^1 = \sum_{i=1}^{n} A_{i,1}x_i, \dots, \ ^tX \cdot A^j = \sum_{i=1}^{n} A_{i,j}x_i, \dots, \ ^tX \cdot A^p = \sum_{i=1}^{n} A_{i,p}x_i) \in M_{1,p}.$$

L'application $g_A : X \in M_{1,n} \mapsto XA \in M_{1,p}$ est linéaire.

Exercice 16. Soit E^j le vecteur colonne $(\delta_{j',j})_{1\leq j\leq p}$. Vérifier que $AE^j = C_j(A)$. Donc

$$f_A(X) = f_A(\sum_{j=1}^{p} x_jE^j) = \sum_{j=1}^{p} x_jf_A(E^j) = \sum_{j=1}^{p} x_jC_j(A).$$

On en déduit une propriété fondamentale :

$$f_A(E^j) = A^j.$$

Exercice 17. Si $n = p$ on a $f_A(X) = X$ pour tout $X \in M_{n,1}$ si et seulement si $A = I_n$, la *matrice identité*, i.e. celle ayant des 1 sur sa diagonale et des 0 partout ailleurs.

Exercice 18. Soit E_i le vecteur ligne $(\delta_{i',i})_{1\leq i\leq n}$. Alors $E_iA = L_i(A)$.

Définition 4.6. Le rang de la matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ est le rang de l'application linéaire f_A, i.e. la dimension de $\mathrm{Vect}(C_1(A), \dots, C_p(A))$.

Définition 4.7 (Multiplication de deux matrices.)**.** Soit $n, p, m \in \mathbb{N}_+$. Soit $A \in M_{n,p}$ et $B \in M_{p,m}$. Ecrivons $B = (C_1(B), \dots C_p(B))$ avec $C_j(B) \in M_{p,1}$. Le produit de AB de A et B est la matrice de $M_{n,m}$ dont les vecteurs colonnes sont les $AC_j(B)$.

Théorème 4.1. *Ecrivons* $A = \begin{pmatrix} L_1(A) \\ \vdots \\ L_n(A) \end{pmatrix}$ *avec* $L_i(A) \in M_{1,p}$*. Alors* AB *est aussi la matrice dont les lignes sont les* $L_i(A)B$ *et on a la formule*

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} A_{im}B_{mj}.$$

Exercice 19. Montrer que $D_n(\mathbb{K})$ est stable par multiplication (scalaire), ainsi que l'ensemble des matrices triangulaires supérieures et celui des des matrices triangulaires inférieures. De même, montrer que la matrice identité I_n est l'élément neutre de la multiplication dans $M_n(\mathbb{K})$.

Proposition 4.3. *Soit* $A \in M_{m,n}$*,* $B \in M_{n,p}$ *et* $C \in M_{p,q}$*. On a*

1. $(AB)C = A(BC)$. $f_{AB} = f_A \circ f_B$.
2. *Si* $C \in M_{n,p}$, $A(B + C) = AB + AC$.
3. *Si* $A \in M_{n,p}$, $(A + B)C = AC + BC$.
4. $^t(AB) = \ ^tB \ ^tA$.

Remarque 4.1. En général, si $A, B \in M_n$, on n'a pas $AB = BA$. Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Définition 4.8. Une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est inversible s'il existe $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$. Il est équivalent de dire que f_A est un automorphisme dont f_B est l'application linéaire réciproque.

Théorème 4.2. *Pour que A soit inversible, il suffit qu'il existe une matrice B telle que $AB = I_n$. Une telle matrice est unique. On l'appelle inverse de A et on la note A^{-1}.*

Démonstration. Pour voir que $BA = I_n$, on transcrit d'abord l'égalité $AB = I_n$ en $f_A \circ f_B = Id$, qui implique $f_B \circ f_A = Id$. En effet, pour tout Y de la forme $f_B(X)$, $f_A \circ f_B(X) = f_A(Y) = X$ implique $f_B \circ f_A(Y) = f_B(X) = Y$. Or, $f_A \circ f_B = Id$, f_B est injective, donc c'est un isomorphisme, et $\mathrm{Im}(f_B) = M_{n,1}$, de sorte que $f_B \circ f_A(Y) = Y$ pour tout Y dans $M_{n,1}$. Donc $f_{BA} = Id$ et l'on en déduit que $BA = I_n$. Alors, si $AC = I_n$ pour une autre matrice C, on a $BAC = B$ donc $C = B$. $\square$

Exercice 20. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer AB. En déduire que $AB = AC \not\Rightarrow B = C$ en général.

Exercice 21. Pour tout $A \in M_n$ inversible, montrer que ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$.

Exercice 22. Un produit quelconque de matrices carrées inversibles est inversible.

Exercice 23. A quelle condition nécessaire et suffisante une matrice diagonale est-elle inversible ?