Exercice 1

Sur I_1 et I_2 on peut diviser par $x(x^2+1)$

Equation homogène $\quad y' - y\dfrac{x^2-1}{x(x^2+1)} = 0$

Solution : $\quad C\exp(A(x))$ avec A une primitive de $\dfrac{x^2-1}{x(x^2+1)}$

Pour trouver cette primitive on utilise la décomposition en éléments simples. On cherche à écrire

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$$

En développant on trouve

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)} = \frac{ax^2+a+bx^2+cx}{x(x^2+1)}$$

Par identification $\quad c=0, \; a=-1, \; b=2$

On a donc

$$\int \frac{x^2-1}{x(x^2+1)}\,dx = \int -\frac{1}{x}\,dx + \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

$$= -\ln|x| + \ln(x^2+1) + cst = \ln\frac{x^2+1}{|x|} + cst$$

~~Au final, les solutions de l'équation homogène sont~~

$\cancel{\dfrac{C}{x} + C(x^2+1)}$ ~~si~~ $\cancel{x>0}$

$\cancel{-\dfrac{C}{x} + C(x^2+1)}$ ~~si~~ $\cancel{x<0}$

Au final les solutions de l'équation homogène sont

$$C \frac{x^2+1}{x} \qquad (\text{pour } x>0 \text{ et pour } x<0)$$

On cherche des sol. particulière de la forme

$$c(x) \frac{x^2+1}{x}$$ on injecte dans l'équation,

on trouve

$$x(x^2+1) \quad c'(x) \frac{x^2+1}{x} + 2x = 0$$

$$c'(x)(x^2+1)^2 = -2x$$

$$c'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

$$c(x) = \frac{1}{x^2+1} + cst.$$

Solution générale de l'équation

$$C \frac{x^2+1}{x} + \frac{1}{x^2+1} \cdot \frac{x^2+1}{x} = C \frac{x^2+1}{x} + \frac{1}{x}$$

$$= \frac{Cx^2+C+1}{x}$$

Le seul cas où on a un recollement sur $\mathbb{R}$ est lorsque $C=-1$

Exercice 2

(1) On divise par x^3

$$y' - \frac{1}{x^3} y = 0$$

$$y = C \exp\left(-\frac{x^{-2}}{2}\right)$$

(2) La fonction $C\exp\left(-\frac{x^{-2}}{2}\right)$ tend vers 0 en 0^+ et 0^-

en effet $-\frac{x^{-2}}{2} = -\frac{1}{2x^2}$ tend vers $-\infty$

et exp tend vers 0 en $-\infty$.

donc si on pose $\varphi = \begin{cases} C\exp\left(-\frac{x^{-2}}{2}\right) & \text{pour } x>0 \\ 0 & \text{pour } x=0 \\ D\exp\left(-\frac{x^{-2}}{2}\right) & \text{pour } x<0 \end{cases}$

On a une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Maintenant la question est de savoir à quelle condition sur C et D cette fonction est dérivable en 0.

On calcule la lim du taux d'accroissement

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{C\exp\left(-\frac{x^{-2}}{2}\right)}{x} = \lim_{u\to +\infty} Cu\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) = 0$$

(en posant $u = \frac{1}{x}$)

par croissance comparée.

de même

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{D \exp\left(-\frac{x^{-2}}{2}\right)}{x} = \lim_{u \to -\infty} D u \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) = 0$$

donc pour tout choix de C et D la fonction définie par

$$\begin{cases} C \exp\left(-\frac{x^{-2}}{2}\right) & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \\ D \exp\left(-\frac{x^{-2}}{2}\right) & \text{pour } x < 0 \end{cases}$$

est dérivable et est une solution de l'équation définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

On cherche une solution part. de la forme ax^2+bx+c

$$x^3(2ax+b) + (ax^2+bx+c)^2 + (ax^2+bx+c)x^2 + 2x^4 = 0$$

on développe, on trouve

$$2ax^4 + bx^3 + a^2x^4 + b^2x^2 + c^2 + 2abx^3 + 2acx^2 + 2bcx + ax^4 + bx^3 + cx^2$$
$$+ 2x^4 = 0$$

On a donc

$$\begin{cases} 2a + a^2 + a + 2 = 0 \\ b + 2ab + b = 0 \\ b^2 + 2ac + c = 0 \\ c^2 = 0 \end{cases}$$

on remonte on trouve $c = 0$ donc $b = 0$ et donc

$a^2 + 3a + 2 = 0$ qui a comme solution $a = -1$ ou $a = -2$

Donc $-x^2$ est une solution part. (Remarque $-2x^2$ aussi)

On fait le changement de variable $z = y + x^2$

$y' = z' - 2x$ donc

$$x^3(z' - 2x) + (z - x^2)^2 + (z - x^2)x^2 + 2x^4 = 0$$

$$x^3 z' - \cancel{2x^4} + z^2 + \cancel{x^4} - 2zx^2 + z\cancel{x^2} - \cancel{x^4} + \cancel{2x^4} = 0$$

$$x^3 z' - z x^2 + z^2 = 0$$

On cherche des solutions qui ne s'annulent pas, on divise par z^2

$$x^3 \frac{z'}{z^2} - x^2 \frac{1}{z} + 1 = 0$$

On fait le changement de variable $u = \frac{1}{z}$

$$-x^3 u' - x^2 u + 1 = 0$$

$$x^3 u' + x^2 u - 1 = 0$$

On résoud l'équation homogène sur $\mathbb{R}^*$ $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$

$$u' + \frac{1}{x} u = 0$$

$$u = \frac{C}{x}, \quad C \in \mathbb{R}$$

On cherche une sol. particulière de la forme $\frac{C(x)}{x}$

$$x^3 \frac{C'(x)}{x} - 1 = 0$$

$$x^2 C'(x) - 1 = 0$$

$$C'(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$C(x) = -\frac{1}{x}$$

solution particulière $= -\frac{1}{x^2}$

Solution générale $u = -\frac{1}{x^2} + \frac{C}{x} \quad C \in \mathbb{R}$

Donc $z = \dfrac{1}{\frac{C}{x} - \frac{1}{x^2}} \quad C \in \mathbb{R} \iff z = \dfrac{x^3}{Cx^2 - x} \quad C \in \mathbb{R}$

$$\boxed{y = \frac{x^3}{Cx^2 - x} - x^2} \quad C \in \mathbb{R}$$

Exercice 4

Equation caractéristique

$$X^2+4X+4 \qquad \Delta = 16-16=0$$

Solution de l'équation homogène

$$c_1\exp(-2x)+C_2 x\exp(-2x) \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution part. par la variation des 2 constantes

$$\begin{cases} C_1'\exp(-2x)+C_2' x\exp(-2x)=0 \\ -2C_1'\exp(-2x)-2C_2' x\exp(-2x)+C_2'\exp(-2x)=\dfrac{e^{-2x}}{1+x^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'+C_2' x=0 \\ -2C_1'+C_2'(1-2x)=\dfrac{1}{1+x^2} \end{cases}$$

(on a tout multiplié par $\exp(2x)$)

$$\begin{cases} 2C_2' x+C_2'(1-2x)=\dfrac{1}{1+x^2} \\ C_1'+C_2' x=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2' = \dfrac{1}{1+x^2} \\ C_1' = x C_2' \end{cases} \qquad \begin{cases} C_2 = \operatorname{Arctan}(x) \\ C_1' = \dfrac{x}{1+x^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2 = \operatorname{Arctan}(x) \\ C_1 = \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) \end{cases}$$

Au final les solutions sont

$$\boxed{\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\exp(-2x) + \mathrm{Arctan}(x)\, x \exp(-2x) + C_1 \exp(-2x) + C_2\, x \exp(-2x),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}}$$

Exercice 5

(1) On vérifie $\langle u, v \rangle = 0$, $\langle u, w \rangle = 0$, $\langle v, w \rangle = 0$

Elle n'est pas orthonormée. $\|u\| = \|v\| = \|w\| = 5$.

(2) On a $x i + y j + z k = X(3i+4j) + Y(5k) + Z(4i-3j)$

On trouve

$$\begin{cases} x = 3X + 4Z \\ y = 4X - 3Z \\ z = 5Y \end{cases}$$

(3) On note (x_A, y_A, z_A) et (X_A, Y_A, Z_A) les coordonnées de A dans les 2 repères

On note (x_B, y_B, z_B) et (X_B, Y_B, Z_B) les coordonnées de B dans les 2 repères.

Alors $\mathrm{dist}(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

$$= \sqrt{(3X_B + 4Z_B - 3X_A - 4Z_A)^2 + (4X_B - 3Z_B - 4X_A + 3Z_A)^2 + (5Y_B - 5Y_A)^2}$$

$$= 5\sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2 + (Z_B - Z_A)^2}$$

(4) La sphère de centre O et de rayon 5 est l'ensemble des points à distance 5 de O. On a donc

M $\in$ Sphère ssi dist(M, O) = 5

ssi $5\sqrt{x_M^2 + y_M^2 + z_M^2} = 5$

ssi $x_M^2 + y_M^2 + z_M^2 = 1$

L'équation est donc $\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = 1}$

(5) On remplace x, y, z

$$4(3X + 4Z) - 3(4X - 3Z) = 25$$

$$16Z + 9Z = 25$$

$$\boxed{Z = 1}$$

(6) En utilisant la formule du cours on trouve

$$\text{dist}(M, P) = \frac{|4\times 3 - 3\times 4 - 25|}{\sqrt{16+9}} = \frac{25}{5} = 5$$

On peut aussi dire M a pour coordonnées (1, 1, 0) dans (O, u, v, w). On cherche la distance au plan Z = 1

Par la question (3) on trouve donc 5 × (distance entre le point (1, 1, 0) et le plan Z = 1) qui vaut bien 5 × 1.