ENS, Département de Mathématiques et Applications
Année universitaire 2018-2019, second semestre

Topologie algébrique, examen final, 4 juin 2019

Problème 1. On rappelle que le degré d'une application continue $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ est le nombre entier α tel que $H_n(f;\mathbb{Z}) = \alpha \,\mathrm{id}_{H_n(\mathbb{S}^n)}$.

1. Soit $n \geq 1$. Soit $r : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ l'application donnée par

$$r(x_0, \ldots, x_n) = (x_0, \ldots, x_{n-1}, -x_n)$$

Montrer que $\deg(r) = -1$. [On suggère de faire une récurrence sur n et d'utiliser un recouvrement ouvert bien choisi de $\mathbb{S}^n$.]

2. Soit $n \geq 2$. Soit A une matrice orthogonale de taille n. On note $f_A : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$ l'application donnée par $f_A(x) = Ax$. Montrer la formule

$$\deg(f_A) = \mathrm{dét}(A)$$

[On pourra utiliser sans démonstration le fait que le groupe orthogonal possède exactement deux composantes connexes par arcs, l'une est celle des matrices orthogonales de déterminant 1 et l'autre celle des matrices de déterminant -1.]

3. Soit $c_1 : \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$ l'application qui envoie $[z_0 : z_1]$ sur $[\overline{z}_0 : \overline{z_1}]$. Montrer que $\deg(c_1) = -1$

4. Soit $c_n : \mathbb{CP}^n \to \mathbb{CP}^n$ l'application

$$[z_0 : \ldots : z_n] \mapsto [\overline{z}_0 : \ldots : \overline{z}_n]$$

calculer le morphisme $H_*(c_n;\mathbb{Z}) : H_*(\mathbb{CP}^n;\mathbb{Z}) \to H_*(\mathbb{CP}^n;\mathbb{Z})$.

Solution. 1. On recouvre $\mathbb{S}^n$ par des ouverts U et V, avec U le complémentaire du point $(-1, 0, \ldots, 0)$ et V le complémentaire du point $(1, 0, \ldots, 0)$. Ces deux ouverts sont fixés par r. Si $n \geq 2$. Considérons d'abord la suite exacte de Mayer-Vietoris relative à ce recouvrement pour $n = 1$. On obtient un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H_1(\mathbb{S}^1) \arrow[r] \arrow[d, "H_1(r)"'] & H_0(U \cap V) \arrow[r] \arrow[d, "H_0(r)"] & H_0(U) \oplus H_0(V) \arrow[d, "H_0(r) \oplus H_0(r)"] \\
0 \arrow[r] & H_1(\mathbb{S}^1) \arrow[r] & H_0(U \cap V) \arrow[r] & H_0(U) \oplus H_0(V)
\end{tikzcd}$$

où les deux lignes horizontales sont exactes. Puisque $U \cap V$ a deux composantes connexes par arcs c_1 et c_2, on a $H_0(U \cap V) \cong \mathbb{Z}c_1 \oplus \mathbb{Z}c_2$. Par ailleurs si on note x un générateur de $H_0(U)$ et y un générateur de $H_0(V)$. On observe que le morphisme $H_0(U \cap V) \to H_0(U) \oplus H_0(V)$ envoie c_1 et c_2 sur (x, y). Le noyau de ce morphisme est donc engendré par $c_1 - c_2$. Par la suite exacte de Mayer-Vietoris, ce noyau s'identifie à $H_1(\mathbb{S}^1)$. Par ailleurs on observe que $H_0(r)(c_1 - c_2) = c_2 - c_1 = -(c_1 - c_2)$. Par commutativité du diagramme, on en déduit que $H_1(r)$ est la multplication par -1 donc que r est de degré -1.

Cela initialise la récurrence. Pour $n \geq 2$. La suite exacte de Mayer Vietoris relative au recouvrement par U et V nous donne un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} H_1(\mathbb{S}^n) \arrow[r] \arrow[d, "H_n(r)"'] & H_{n-1}(U \cap V) \arrow[d, "H_{n-1}(r)"] \\ H_n(\mathbb{S}^n) \arrow[r] & H_{n-1}(U \cap V) \end{tikzcd}$$

où les morphismes horizontaux sont des isomorphismes. Par ailleurs, si on identifie $\mathbb{S}^{n-1}$ au sous-espaces de $\mathbb{S}^n$ donné par les points tels que $x_0 = 0$, on observe que la restriction de r à ce sous-espace est simplement l'application r en dimension $(n-1)$. Enfin l'inclusion $\mathbb{S}^{n-1} \to U \cap V$ est une équivalence d'homotopie. On en déduit par l'hypothèse de récurrence que $H_1(r)$ est bien la multiplication par -1.

2. On observe que s'il existe un chemin continu $t \mapsto A(t)$ de l'intervalle $I = [0, 1]$ vers $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$, on a une homotopie $I \times \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$ entre $f_{A(0)}$ et $f_{A(1)}$ donnée par la formule

$$(t, x) \mapsto A(t)x$$

Puisque deux applications homotopes ont même degré, il suffit de traiter le cas d'une matrice orthogonale de déterminant 1 et d'une matrice orthogonale de déterminant -1. Pour le déterminant 1, on peut prendre $A = I_n$ auquel cas le résultat est trivial. Pour le déterminant -1, on peut prendre la matrice diagonale avec un coefficient -1 et $(n-1)$ coefficients 1. Ce cas est traité dans la question précédente.

4. La projection stéréographique nous donne une identification $S^2 \cong \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (où on met sur $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ la topologie dont les ouverts sont les ouverts de $\mathbb{C}$ et les ensembles de la forme $V \cup \{\infty\}$ avec V le complémentaire d'un compact de $\mathbb{C}$). On peut ensuite identifier $\mathbb{CP}^1$ avec $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ par l'application $[z_0 : z_1] \mapsto z_0/z_1$. On peut vérifier que l'homéomorphisme qu'on obtient $\mathbb{S}^2 \to \mathbb{CP}^1$ est donné par

$$(x_0, x_1, x_2) \mapsto [x_0 + ix_1 : 1 - x_2]$$

Vu à travers cet homéomorphisme, l'application c_1 devient simplement l'application $r(x_0, x_1, x_2) = (x_0, -x_1, x_2)$ qui est de degré -1 par la question précédente.

5. On commence par calculer $H_2(c_n) : H_2(\mathbb{CP}^n; \mathbb{Z}) \to H_2(\mathbb{CP}^n; \mathbb{Z})$. Pour ce faire, on utlilise l'inclusion $\mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^n$ qui envoie $[z_0 : z_1]$ sur $[z_0 : z_1 : 0 : \ldots : 0]$. On a vu dans le cours que cette inclusion induit un isomorphisme sur le H_2 (c'est l'inclusion du 2-squeulette de la CW-structure standard sur $\mathbb{CP}^n$). Par ailleurs c_n préserve le sous-espace $\mathbb{CP}^1$ et la restriction de c_n à ce sous-espace s'identifie à c_1. Par la question précédente le morphisme $H_2(c_n)$ est donc la multiplication par -1. On a vu dans le cours que $H_*(X; \mathbb{Q})$ est

naturellement isomorphe à $H_*(X;\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}$ pour tout espace X, on en déduit donc que $H_2(c_n;\mathbb{Q})$ est encore donné par la multiplication par -1. L'application duale (ou transposée) de $-\mathrm{id}$ est encore $-\mathrm{id}$, on en déduit donc que $H^2(c_n;\mathbb{Q})$ est encore donnée par $-\mathrm{id}$. Enfin puisque c_n est un homéomorphisme continu, il doit induire un automorphisme de l'algèbre $H^*(\mathbb{CP}^n;\mathbb{Q})$. On sait qu'en temps qu'algèbre $H^*(\mathbb{CP}^n;\mathbb{Q})$ est engendré par n'importe quel élément non nul de degré 2, et on vient de voir que c_n agit par multiplication par -1 sur un tel élément. On en déduit que c_n agit par multiplication par $(-1)^p$ en degré $2p$ pour tout nombre entier p. On peut repasser au dual et on en déduit qu'il en va de même en homologie.

Problème 2. Soit B un espace topologique connexe par arcs et localement simplement connexe. Soit $p : E \to B$ un revêtement à n feuillets (c'est à dire que la fibre de p au-dessus de n'importe quel point de B est de cardinalité n).

1. Soit $\sigma : \Delta^k \to B$ une application continue du k-simplexe vers B. Montrer qu'il existe exactement n applications continues $\tilde{\sigma} : \Delta^k \to E$ telle ques $p \circ \tilde{\sigma} = \sigma$.

2. Soit R un anneau commutatif. On note $Tr_k : C_k(B;R) \to C_k(E;R)$ l'unique morphisme R-linéaire qui envoie $\sigma : \Delta^k \to B$ vers la somme de ses n relèvements construits à la question précédente. Montrer que la composée
$$C_k(B;R) \xrightarrow{Tr_k} C_k(E;R) \xrightarrow{C_k(p)} C_k(B;R)$$
est égale à la multiplication par n.

3. Montrer que les morphismes Tr_k s'assemblent en un morphisme de complexes de chaînes
$$Tr : C_*(B;R) \to C_*(E;R)$$
[On pourra utiliser sans démonstration le fait que p a la propriété de relèvement unique par rapport aux k inclusions de faces $\Delta^{k-1} \to \Delta^k$]

4. On note tr_* (avec un t minuscule), et on appelle morphisme de transfert, le morphisme $H_*(B;R) \to H_*(E;R)$ induit en homologie. On suppose que le nombre n est inversible dans R, montrer que tr est un morphisme injectif de $H_*(B;R)$ vers $H_*(E;R)$.

5. On suppose que $n \neq 1$ dans R, montrer qu'il n'existe pas d'application continue $q : B \to E$ telle que $H_0(q;R) = tr_0$.

Solution. 1. Fixons n'importe quel point x de Δ^k. Puisque Δ^k est simplement connexe, il existe un unique relèvement $\tilde{\sigma}$ de σ prenant la valeur y en x pour chaque choix de relèvement y de $\sigma(x)$. Puisqu'il existe exactement n choix pour y, on a n relèvements possible pour σ.

2. Soit $\sigma : \Delta^k \to B$ une application continue. Par définition, pour tout choix de relèvement $\tilde{\sigma}$ de σ, on a $p \circ \tilde{\sigma} = \sigma$. Le morphisme $C_k(p)$ envoie une application continue $\tau : \Delta^k \to E$ sur $p \circ \tau : \Delta^k \to B$. On constate donc que la

composée $C_k(p) \circ Tr_k$ est bien la multiplication par n sur tous les générateurs de $C_k(B)$ et donc sur $C_k(B)$ tout entier.

3. Soit $j : \Delta^{k-1} \to \Delta^k$ l'inclusion de l'une des faces. Soit $\sigma : \Delta^k \to B$ une application continue et $\tau = \sigma \circ j$ sa restriction à cette face. Soient $\{\tilde{\sigma}_i, i \in \{1, \dots, n\}\}$ les n relèvements de σ à E et $\{\tilde{\tau}_i, i \in \{1, \dots, n\}\}$ leur restriction à la face j. Par unicité du relèvements, les applications $\tilde{\tau}_i$ sont exactement les n relèvements de τ à E. Ce raisonnment est valide pour chacune des k faces de Δ^k d'autre part la différentielle du complexe des chaînes singulières est donnée par la somme alternée des faces. On en déduit donc que Tr est bien compatible à la différentielle.

4. On observe que la composée

$$H_*(B) \xrightarrow{tr_*} H_*(E) \xrightarrow{H_*(p)} H_*(B)$$

est simplement la multiplication par n (en effet c'est l'homologie du morphisme $n\,\mathrm{id}$ au niveau des complexes de chaînes). Sous notre hypothèse sur R, cette composée est injective.

5. En effet s'il existait une telle application continue, la composée $f = p \circ q$ serait une application continue $B \to B$ qui induit la multiplication par n au niveau du H_0. D'un autre côté, on sait que $H_0(B)$ est un R-module libre de rang 1 engendré par l'unique composante connexe par arcs de B et $H_0(f)$ envoie ce générateur sur lui-même. C'est absurde si $n \neq 1$.

Problème 3. Ce problème est la suite du problème précédent. On souhaite caractériser l'image du transfert. Pour simplifier, on va supposer que l'anneau des coefficients est un corps qu'on note K. Les complexes de chaînes singulières ou les groupes d'homologie sont toujours à coefficients dans K.

Soit G un groupe fini de cardinal n, soit V un espace vectoriel sur K muni d'une action linéaire à gauche de G. On note $g.v$ l'action d'un élément g de G sur un vecteur v de V. On note V^G le sous-espace de V defini par

$$V^G = \{v \in V, g.v = v \text{ pour tout } g \in G\}$$

On note V_G l'espace vectoriel V quotienté par le sous-espace engendré par les vecteurs de la forme $v - g.v$

1. On considère l'application linéaire $V \to V$ qui envoie v sur $\sum_{g \in G} g.v$. Montrer que son image est contenue dans V^G et qu'elle se factorise par V_G.

2. Montrer que le morphisme induit $V_G \to V^G$ est un isomorphisme si la caractéristique de K ne divise pas n. On note N ce morphisme. [On peut considérer le morphisme $V^G \to V_G$ donné par la composée de l'inclusion $V^G \to V$ et de l'application quotient $V \to V_G$].

3. On reprend les notations et les hypothèses du problème précédent. On suppose qu'il existe une action à gauche continue et libre de G sur E telle

que $p : E \to B$ s'identifie à l'application quotient $E \to E/G$. Montrer que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} C_*(E) \arrow[r, "C_*(p)"] \arrow[d, "q"'] & C_*(B) \arrow[r, "Tr"] & C_*(E) \\ C_*(E)_G \arrow[rr, "N"'] & & C_*(E)^G \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

Le morphisme q est le morphisme quotient, le morphisme i est l'inclusion et le morphisme N est celui défini dans la question 2. L'action de G sur $C_*(E)$ est celle qui vient, par fonctorialité, de l'action de G sur E.

4. En déduire que le morphisme Tr induit un isomorphisme $C_*(B) \cong C_*(E)^G$.
5. Montrer que tr induit un isomorphisme $H_*(B) \cong H_*(E)^G$.
6. Vérifier que $(H^*(E))^G$ est une sous-algèbre de $H^*(E)$ et montrer que $H^*(p)$ induit un isomorphisme $H^*(B) \cong H^*(E)^G$.
7. En déduire un calcul de la cohomologie de $\mathbb{RP}^n$ à coefficients dans un corps de caractéristique différente de 2. [On pourra utiliser la question 2 du Problème 1.]

Solution. 1. L'image est contenue dans V^G puisque $h.(\sum_g g.v) = \sum_g hg.v = \sum_g g.v$ (la dernière égalité venant du fait que $g \mapsto hg$ est une bijection de G vers G pour tout élément h de G). Pour montrer que ce morphisme se factorise par V_G il suffit de montrer que les vecteurs de la forme $v - h.v$ sont envoyés sur 0. L'image de ce vecteur est donnée par la somme

$$\sum_g g.v - \sum_g gh.v$$

qui vaut zéro par le raisonnement ci-dessus.

2. On note Q le morphisme $V^G \to V_G$ décrit dans l'indication. On calcule sans peine que la composée $N \circ Q$ est simplement la multiplication par n. La composée $Q \circ N$ envoie la classe d'un vecteur v de V sur la classe de la somme $\sum_{g\in G} g.v$. Par ailleurs l'équation

$$nv = \sum_{g\in G} g.v - \sum_{g\in G} (v - g.v)$$

montre que la classe de $\sum_{g\in G} g.v$ est la même que la classe de nv. Le morphisme $Q \circ N$ est donc également donné par la multiplication par n. On déduit de ces calculs que $\frac{1}{n}Q$ est l'inverse de N.

3. Il suffit de vérifier la commutativité sur les générateurs de $C_*(E)$. La composée $Tr \circ C_*(p)$ envoie une application continue $\sigma : \Delta^k \to E$ sur la somme des n relèvements de $p \circ \sigma$. La composée $i \circ N \circ q$ envoie σ sur la somme $\sum_g g.\sigma$.

Il suffit alors d'observer que les n applications continues $g.\sigma : \Delta^k \to E$ sont exactement les n relèvements de $p \circ \sigma$. En effet, ces n applications sont toutes distinctes puisque l'action de G est libre et ce sont toutes des relèvements (et par la question 1 du Problème 2 on sait qu'il existe exactement n relèvements distincts).

4. La commutativité du diagramme montre que Tr se factorise par $C_*(E)^G$. La surjectivité de N et la commutativité du diagramme montre que le morphisme induit $C_*(B) \to C_*(E)^G$ est surjectif. Dans le problème précédent, on a montré que $C_*(p) \circ Tr$ est la multiplication par n, c'est donc un morphisme injectif, et on en déduit que Tr est également injectif.

5. On peut généraliser cette question de la manière suivante : si C_* est un complexe de chaîne muni d'une action de G (linéaire et compatible à la différentielle) alors on peut considérer le sous-complexe C^G de C. L'inclusion $C^G \to C$ induit un morphisme $H_*(C^G) \to H_*(C)$ qui se factorise par $H_*(C)^G$. On souhaite montrer que le morphisme induit $H_*(C^G) \to H_*(C)^G$ est un isomorphisme. L'injectivité est facile, il s'agit simplement d'observer que si $x \in C_n^G$ est un bord, alors son image dans C est encore un bord et donc la classe de x dans $H_n(C)^G$ est zéro. Pour montrer la surjectivité, on se donne x un cycle de C_n qui représente une classe dans $H_n(C)^G$. On pose

$$y = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} g.x$$

Il est clair que y est encore un cycle, par ailleurs y vit dans le sous-complexe C^G. Il suffit donc de montrer que y représente la même classe que x dans $H_n(C)$. En d'autre termes, il faut montrer que $y - x$ est un bord. On a la formule

$$y - x = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} (g.x - x)$$

Puisque la classe d'homologie représentée par x est dans $H_n(C)^G$, on sait que pour tout g, $g.x - x$ est un bord de C_n, on peut donc écrire $g.x - x = d(z_g)$ pour un certain z_g dans C_{n+1}. On a alors

$$y - x = d\left(\frac{1}{n} \sum_{g \in G} z_g\right)$$

6. Par hypothèse, pour tout $g \in G$, l'application $x \mapsto g.x$ de E vers E est continue. On en déduit que l'application induite $H^*(E) \to H^*(E)$ est un morphisme d'algèbres commutatives graduées. On en déduit que le sous-espace vectoriel $H^*(E)^G$ est stable par la multiplication et est donc une sous-algèbre.

L'application $C_*(p) : C_*(E) \to C_*(B)$ se factorise par $C_*(E)_G$. Par ailleurs la commutativité du diagramme de la question 3 montre que le morphisme induit $C_*(E)_G \to C_*(B)$ est un isomorphisme. En passant au dual, on trouve un isomorphisme $C^*(B) \cong (C_*(E)_G)^\vee$. On vérifie par ailleurs que pour tout espace vecoriel V avec une action de G, on a un isomorphisme naturel $(V_G)^\vee \cong (V^\vee)^G$. On a donc montré que l'application $C^*(p)$ induit un isomorphisme $C^*(B) \cong C^*(E)^G$. En passant à la cohomologie comme dans la question précédente, on trouve que $H^*(p)$ induit un isomorphisme $H^*(B) \cong H^*(E)^G$.

7. On utilise le fait que $\mathbb{RP}^n \cong \mathbb{S}^n/C_2$ où C_2 est le groupe cyclique d'ordre 2 et où l'action de l'élément non-trivial de C_2 est l'antipode : $x \mapsto -x$. Par la question précédente, si K est un corps de caractéristique différente de 2, $H^*(\mathbb{RP}^n)$ est la sous-algèbre de $H^*(\mathbb{S}^n)$ constituée des classes invariantes par l'action de C_2. La question 2 du problème 1 montre que l'élément non-trivial de C_2 induit un automorphisme de $\mathbb{S}^n$ de degré 1 si n est impair et -1 si n est pair. On en déduit un isomorphisme d'algèbre $H^*(\mathbb{RP}^n) \cong H^*(\mathbb{S}^n)$ si n est impair et $H^*(\mathbb{RP}^n) \cong K$ si n est pair.

Problème 4. Pour un groupe abélien A, et un nombre premier p on note $A_{(p)}$ le noyau du morphisme

$$m_p : A \to A$$

qui envoie a sur pa.

1. Soit A un groupe abélien montrer qu'on a un isomorphisme naturel en A $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p \cong A/(\mathrm{im}(m_p))$.

2. Soit X un espace topologique, montrer que pour tout entier n, on dispose d'une suite exacte courte

$$0 \to H_n(X;\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p \to H_n(X;\mathbb{F}_p) \to H_{n-1}(X;\mathbb{Z})_{(p)} \to 0$$

   [Ce résultat a été montré en cours donc on pourra se contenter d'une réponse rapide.]

3. Montrer que la suite exacte courte ci-dessus est une suite exacte courte de $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels.

4. Soit A un groupe abélien de type fini. On rappelle qu'il existe alors un isomorphisme

$$A \cong \mathbb{Z}^{\oplus m} \oplus \left[\bigoplus_{p,k} (\mathbb{Z}/(p^k))^{\oplus n_{p,k}}\right]$$

   où la somme est indexée par les paires (p,k) avec p un nombre premier et k un nombre entier strictement positif et les coefficients m et $n_{p,k}$ sont des nombres entiers positifs presque tous nuls. Calculer en termes des coefficients de cette décomposition la dimension de $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p$.

5. Même question pour la dimension de $A_{(p)}$.

6. Soit X un espace topologique dont tous les groupes d'homologies à coefficients dans $\mathbb{Z}$ sont de type fini. Montrer que, pour tout nombre premier p, les groupes d'homologie à coefficients dans $\mathbb{F}_p$ sont de dimension finie.

7. Mêmes hypothèses sur X. On suppose que pour tout i, il existe un nombre entier positif b_i tel que $b_i = \dim H_i(X; \mathbb{F}_p)$ pour tout nombre premier p. Montrer que, pour tout i, $H_i(X; \mathbb{Z})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^{\oplus b_i}$.

8. Question bonus : Le résultat de la question précédente reste-t-il vrai si on ne suppose plus que les groupes d'homologie de X sont de type fini ?

Solution. 1. Il suffit de vérifier que ces deux groupes abéliens satisfont la même propriété universelle. Se donner un morphisme $f : A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p$ est équivalent à se donner une application bilinéaire $g : A \times \mathbb{F}_p \to B$. Une telle application g est uniquement déterminée par le morphisme $h : A \to B$ avec $h(a) = g(a, 1)$, en effet, par bilinéarité, on a $g(a, [n]) = h(na)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On constate que $h(pa) = 0$ et donc h se factorise par le quotient $A/(\mathrm{im}(m_p))$. On a donc associé à f un morphisme $h : A/(\mathrm{im}(m_p)) \to B$. Réciproquement, étant donné $h : A/(\mathrm{im}(m_p)) \to B$, on peut construire un morphisme $f : A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p \to B$ par la formule $f(a \otimes x) = xh(a)$ (on vérifie aisément que cela ne dépend que de la classe de x modulo p).

2. On considère la suite exacte courte de complexes de chaînes

$$0 \to C_*(X; \mathbb{Z}) \xrightarrow{m_p} C_*(X; \mathbb{Z}) \to C_*(X; \mathbb{F}_p) \to 0$$

Cette suite exacte courte induit une suite exacte longue dont on peut extraire le morceau suivant

$$H_n(X; \mathbb{Z}) \xrightarrow{m_p} H_n(X; \mathbb{Z}) \to H_n(X; \mathbb{F}_p) \to H_{n-1}(X; \mathbb{Z}) \xrightarrow{m_p} H_{n-1}(X; \mathbb{Z})$$

Cette suite exacte donne une suite exacte courte

$$0 \to H_n(X; \mathbb{Z})/(\mathrm{im}(m_p)) \to H_n(X; \mathbb{F}_p) \to \ker(m_p : H_{n-1}(X) \to H_{n-1}(X)) \to 0$$

qui (par la question précédente) est bien la suite exacte courte cherchée.

3. Il n'y a presque rien à faire. Il faut noter qu'un morphisme de groupes abéliens entre deux $\mathbb{F}_p$-espace vectoriels est automatiquement un morphisme $\mathbb{F}_p$-linéaire. Par ailleurs un groupe abélien A est un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel si et seulement si $m_p : A \to A$ est le morphisme nul. Dans notre suite exacte, les deux premiers termes sont de manière évidente des $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels. Pour A un groupe abélien quelconque, la multiplication par p est nulle par construction sur $A_{(p)}$ donc ce groupe est un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel.

4. On commence par observer que pour une famille de groupes abéliens $\{A_i\}_{i \in I}$, on a un isomorphisme $(\oplus A_i) \otimes \mathbb{F}_p \cong \oplus(A_i \otimes \mathbb{F}_p)$. Par la question 1. on calcule alors facilement $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{F}_p \cong \mathbb{F}_p$, $\mathbb{Z}/(p^k) \otimes \mathbb{F}_p \cong \mathbb{F}_p$ et $\mathbb{Z}/(q^k) \otimes \mathbb{F}_p = 0$ si q est un nombre premier différent de p. La dimension de $A \otimes \mathbb{F}_p$ est donc $m + \sum_k n_{p,k}$.

5. Comme dans la question précédente, on commence par observer que pour une famille de groupes abéliens $\{A_i\}_{i \in I}$, on a un isomorphisme $(\oplus A_i)_{(p)} \cong \oplus(A_i)_{(p)}$. On peut donc là-aussi calculer terme à terme et on trouve $\mathbb{Z}_{(p)} \cong 0$ $(\mathbb{Z}/(q^k))_{(p)} = 0$ si q est un nombre premier différent de p et $\mathbb{Z}/(p^k))_{(p)} \cong \mathbb{F}_p$. La dimension de $A_{(p)}$ est donc $\sum_k n_{p,k}$.

6. Par les deux questions précédentes, on observe que pour tout n, $H_n(X;\mathbb{Z})\otimes \mathbb{F}_p$ et $H_n(X;\mathbb{Z})_{(p)}$ sont des $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels de dimension finie. La suite exacte courte de la question 2. implique alors que les groupes $H_n(X;\mathbb{F}_p)$ sont de dimension finie.

7. On note $m(i)$ et $n_{p,k}(i)$ les coefficients apparaissant dans la décomposition de la question 4 pour le groupe $H_i(X;\mathbb{Z})$. On va d'abord montrer par récurrence sur i que le nombre $\sum_k n_{p,k}(i)$ est indépendant de p pour tout i. C'est vrai pour $i = 0$ puisque dans ce cas tous ces coefficient sont nuls (l'homologie en degré zéro est toujours un groupe abélien libre). Par les questions 4 et 5 et la suite exacte courte de la question 2, on trouve la formule suivante pour $i \geq 1$:

$$\mathrm{dim} H_i(X;\mathbb{F}_p) = m(i) + \sum_k n_{p,k}(i) + \sum_k n_{p,k}(i-1)$$

qui implique bien le résultat souhaité par l'hypothèse de récurrence et le fait que $\dim H_i(X;\mathbb{F}_p)$ est indépendant de p. On en déduit alors que si $n_{p,k}(i) \neq 0$ pour un certaine paire (p,k), toutes les sommes $\sum_k n_{q,k}(i)$ sont non nulles ce qui est en contradiction avec le fait que seul un nombre fini des coefficients $n_{p,k}(i)$ sont non nuls. On a donc $n_{p,k}(i) = 0$ pour toute paire (p,k) ce qui est le résultat voulu.

8. Non le résultat n'est pas vrai. Comme contre-exemple, on peut prendre le bouquet $X = \bigvee_p \mathbb{S}^1/p$ indexé par tous les nombres premiers. $\mathbb{S}^1/p$ est l'espace de Moore qui est un CW-complexe avec une cellule de dimension 0, une cellule de dimension 1 et une cellule de dimension 2 et où l'application d'attachement est l'application de degré $p : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$. Un calcul d'homologie cellulaire montre que $H_*(X;\mathbb{F}_p)$ est de dimension 1 en degré 0 1 et 2 pour tout p et est nul en degré > 2. D'un autre côté $H_1(X;\mathbb{Z}) \cong \bigoplus_p \mathbb{Z}/(p)$.