E. Hoffbeck, M. Tamiozzo L2 - Paris 13

Groupes et Symétries
Partiel 1
Durée : 2 heures

Documents et appareils électroniques interdits

Exercice 1. Rappeler la définition de l'ensemble $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ (on donnera la liste de ses éléments et leur définition comme sous-ensembles de $\mathbb{Z}$).

Exercice 2. Soit $(G, *)$ un groupe et X un ensemble. Donner la définition d'une action à gauche de G sur X. Pour $x \in X$, définir le stabilisateur de x et l'orbite de x.

Exercice 3. On considère le groupe $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ avec sa loi d'addition usuelle notée $+$, dont les éléments sont notés $\bar{k}$.

1. Déterminer le sous-groupe $\langle \bar{3} \rangle$.
2. En utilisant que $4 \times 4 = 16$, déterminer le sous-groupe $\langle \bar{4} \rangle$.
3. Donner un morphisme injectif de $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$. *Pas besoin de justifier.*
4. Donner un morphisme de $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, +)$. *Pas besoin de justifier.*

Exercice 4. Montrer que la formule $f(\bar{k}) = 3k$ ne définit pas une application de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}$.

Montrer que la formule $g(\bar{k}) = \overline{4(9-k)}$ définit une application de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, puis que c'est un morphisme de groupes. Quel est son noyau ?

Exercice 5. Soit $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $\varphi : \mathbb{Z} \times X \to X$ l'application donnée par $(n, x) \mapsto x \times i^n$ (où $\times$ est la multiplication dans $\mathbb{C}$).

1. Démontrer que φ est une action à gauche de $\mathbb{Z}$ sur X.
2. Déterminer le stabilisateur Stab_x pour tout $x \in X$.
3. Déterminer l'orbite de $-i$.
4. Déterminer le fixateur $\mathrm{Fix}(2)$.
   Rappel : Si un groupe G agit sur un ensemble X, on note pour $g \in G$, $\mathrm{Fix}(g) = \{x \in X \mid g \cdot x = x\}$.

Exercice 6. Soit M un ensemble muni d'une loi interne $*$ qui est associative et qui possède un neutre noté e. On appelle $M^\times$ l'ensemble des éléments admettant un inverse pour la loi $*$.

1. Montrer que $M^\times$ est un groupe pour la restriction de la loi $*$.
2. Pour M l'ensemble des fonctions de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ vers lui-même et la loi $\circ$ de composition, montrer que $M^\times$ est un groupe connu.
3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On admet que pour k et ℓ des entiers relatifs, la formule $\bar{k} * \bar{\ell} = \overline{k\ell}$ définit une loi interne sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, associative, dont le neutre est $\bar{1}$.
   Montrer que $M^\times$ est isomorphe à un groupe connu et donner son cardinal.