E. Hoffbeck, M. Tamiozzo L2 - Paris 13

Groupes et Symétries
Partiel 2
Durée : 2 heures

Documents et appareils électroniques interdits

Justifiez toujours vos réponses, sauf mention contraire. Si vous utilisez un résultat du cours/TD, signalez-le.

Il n'est pas nécessaire de tout faire pour obtenir la note maximale. Barème indicatif : 8+4+3+8.

Exercice 1. (Questions diverses)

1. Existe-t-il un élément d'ordre 5 dans S_4 ? Et un élément d'ordre 6 dans S_5 ? Justifiez votre réponse en donnant un exemple ou une démonstration.
2. Soit $\sigma = (12)(234)(3456)(67) \in S_8$. Montrer que pour tout entier $k \geq 1$ impair on a $\sigma^k \neq \mathrm{Id}$.
3. Donner un exemple d'un groupe infini non abélien G et d'un sous-groupe $H \subset G$ fini abélien avec $H \neq \{e_G\}$.
4. Déterminer les points fixes de la transformation du plan complexe $f : z \mapsto i\,\overline{z}$. De quel type d'isométrie s'agit-il ?
5. Donner la liste des sous-groupes de S_3 (pas besoin de justifier).
6. Combien de morphismes de groupes injectifs $f : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to S_3$ existe-t-il ?
7. Donner un morphisme de groupes surjectif $f : S_3 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (pas besoin de justifier).
8. Soit $T \subset \mathbb{R}^2$ le triangle de sommets $(1,0), (0,1), (0,-1)$. Écrire une isométrie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ différente de l'identité telle que $f(T) = T$ (pas besoin de justifier).

Exercice 2. Soit $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Le groupe G est-il commutatif ?
2. Donner un morphisme de groupes surjectif $G \to \mathbb{R}^*$ (la loi de groupe sur $\mathbb{R}^*$ étant donnée par la multiplication).
3. Montrer que l'application
$$\begin{aligned} G \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, x \right) &\mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = ax + b \end{aligned}$$
définit une action à gauche de G sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que, pour tous réels x_1, x_2 avec $x_1 \neq x_2$, il existe $g \in G$ tel que $g \cdot 0 = x_1$ et $g \cdot 1 = x_2$. Un tel g est-il unique ?

Exercice 3. Soient $(\mathcal{E}, E, *)$ et $(\mathcal{E}', E', *)$ deux espaces affines.

1. Donner la définition d'un sous-espace affine de $\mathcal{E}$.

2. Donner la définition d'une application affine f de $\mathcal{E}'$ vers $\mathcal{E}$.

3. Prouver que l'image réciproque d'un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ par une application affine $f : \mathcal{E}' \to \mathcal{E}$ est soit vide soit un sous-espace affine de $\mathcal{E}'$.

Exercice 4. (Théorème de Cauchy)

0. Soit G un groupe agissant à gauche sur un ensemble X. Pour $x \in X$, donner la définition de stabilisateur de x et orbite de x.

Le but du reste de l'exercice est de montrer le résultat suivant.

Théorème (Cauchy, 1845) Soit H un groupe fini et p un nombre premier qui divise le cardinal de H. Il existe un élément de H d'ordre p.

On fixe désormais un groupe fini H et un premier p qui divise le cardinal de H. On pose $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $X = \{(h_1, \dots, h_p) \in H^p \mid h_1 h_2 \cdots h_p = e_H\} \subset H^p$.

1. Montrer que pour tout $(h_1, \dots, h_{p-1}) \in H^{p-1}$, il existe un unique $h_p \in H$ tel que $(h_1, \dots, h_{p-1}, h_p)$ appartient à X.

2. À l'aide de la question précédente, donner le cardinal de X en fonction du cardinal de H, et en déduire que p divise le cardinal de X.

3. Si $(h_1, \dots, h_{p-1}, h_p) \in X$, montrer que $(h_p, h_1, \dots, h_{p-1}) \in X$. Montrer que l'application
$$\begin{aligned} f : X &\to X \\ (h_1, \dots, h_{p-1}, h_p) &\mapsto (h_p, h_1, \dots, h_{p-1}) \end{aligned}$$
satisfait $f^p = \mathrm{Id}$.

4. En déduire que l'application
$$\begin{aligned} G \times X &\to X \\ (\bar{i}, x) &\mapsto f^i(x) \end{aligned}$$
est bien définie, et que c'est une action à gauche de G sur X.

5. Soit $x = (h_1, \dots, h_p) \in X$ tel qu'il existe $1 \leq i < j \leq p$ avec $h_i \neq h_j$. Montrer que l'orbite de x a pour cardinal p.
Indication : vous pouvez admettre et utiliser le fait suivant : si $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p premier, et $x \in X$, alors l'orbite de x a pour cardinal 1 ou p.

6. En déduire qu'il existe $h \in H$ d'ordre p.