E. Hoffbeck, M. Tamiozzo L2 - Paris 13

Groupes et Symétries
Rattrapage
Durée : 2 heures
Documents et appareils électroniques interdits

Justifiez toujours vos réponses, sauf mention contraire. Si vous utilisez un résultat du cours/TD, signalez-le.

Exercice 1. (Questions diverses)

1. Donner un exemple de groupe fini commutatif, un exemple de groupe fini non commutatif, un exemple de groupe infini commutatif, un exemple de groupe infini non commutatif.
2. Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure affine usuelle, donner une équation de la droite D passant par les points A de coordonnées $(1,1)$ et B de coordonnées $(-1,0)$, puis donner deux isométries affines (différentes de l'identité) envoyant D sur D.
3. Prouver qu'il existe un et un seul isomorphisme entre $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},+)$ et $(\{+1,-1\},\times)$, puis donner pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ un morphisme surjectif de $(S_n,\circ)$ vers $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},+)$.
4. Déterminer les points fixes de la transformation du plan complexe $f : z \mapsto iz+1$. De quel type d'isométrie s'agit-il ?
5. Donner la liste des sous-groupes de $(S_3,\circ)$ (pas besoin de justifier).
6. Donner la liste des sous-groupes de $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z},+)$ (pas besoin de justifier).
7. Donner deux morphismes de groupes distincts de $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Sont-ils des isomorphismes ?
8. Soit $\sigma = (123)(456)(67)(23)(45) \in S_8$. Déterminer les points fixes, la signature et l'ordre de σ.

Exercice 2. Montrer que la formule $f(\bar{k}) = 2k$ ne définit pas une application de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}$.

Montrer que la formule $g(\bar{k}) = \overline{3(4-k)}$ définit une application de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, puis que c'est un morphisme de groupes. Quel est son noyau ?

Exercice 3. Soit $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $\varphi : \mathbb{Z} \times X \to X$ l'application donnée par $(n,x) \mapsto x \times i^n$ (où $\times$ est la multiplication dans $\mathbb{C}$).

1. Démontrer que φ est une action à gauche de $\mathbb{Z}$ sur X.
2. Déterminer le stabilisateur Stab_x pour tout $x \in X$.
3. Déterminer l'orbite de $-i$.
4. Déterminer le fixateur $\mathrm{Fix}(2)$.
   Rappel : Si un groupe G agit sur un ensemble X, on note pour $g \in G$, $\mathrm{Fix}(g) = \{x \in X \mid g{\cdot}x = x\}$.

Exercice 4. Soient $(\mathcal{E}, E, *)$ et $(\mathcal{E}', E', *)$ deux espaces affines.

1. Donner la définition d'un sous-espace affine de $\mathcal{E}$.

2. Donner la définition d'une application affine f de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{E}'$.

3. Prouver que l'image directe d'un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ par une application affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}'$.

Exercice 5. On considère le plan affine $\mathbb{R}^2$ avec sa structure usuelle. On pourra faire l'identification usuelle entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$.

Soient x_0 fixé dans $\mathbb{R}^2$ et $\theta \in]0, 2\pi[$. On note $r = r_{x_0}(\theta)$ la rotation d'angle θ et de centre x_0.
Soit v un vecteur de $\mathbb{R}^2$ et t_v la translation associée.

1. Démontrer que $t_v \circ r \circ t_{-v}$ est une isométrie de $\mathbb{R}^2$ et chercher ses points fixes. Déterminer quelle isométrie est $t_v \circ r \circ t_{-v}$.

2. Soit D la droite des abscisses dans $\mathbb{R}^2$. Donner la formule de la symétrie s_D par rapport à la droite D. Déterminer alors la formule de la composée $t_v \circ s_D \circ t_{-v}$ (on pourra faire un dessin). Quel type d'isométrie est-ce ?

3. Pour quels vecteurs v a-t-on $r = t_v \circ r \circ t_{-v}$?
   Pour quels vecteurs v a-t-on $s_D = t_v \circ s_D \circ t_{-v}$?