# LA TOUR DE GOODWILLIE

## 1. Le contexte

On considère $\mathbf{C}$ and $\mathbf{D}$ deux $\infty$-catégories pointées $\omega$-présentables. Les exemples fondamentaux sont les suivants

(1) L'$\infty$-catégorie $\mathbf{S}_*$ des espaces pointés.
(2) L'$\infty$-catégorie des spectres.
(3) L'$\infty$-catégorie des $R$-modules sepctraux pour $R$ un anneau en spectre (cet exemple inclus les complexes de chaînes sur un anneau $R$).
(4) L'$\infty$-catégorie $\mathbf{Alg}_P$ des $P$-algèbres en spectres ou complexes de chaînes pour $P$ une opérade sans opérations d'arité 0.

Pour $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ deux telles catégories, on appellera foncteur de $\mathbf{C}$ vers $\mathbf{D}$ un foncteur finitaire et réduit (i.e. $F(*) = *$).

## 2. Foncteurs excisifs

**Définition 2.1.** Pour $\mathbf{d}$ l'ensemble $\{1, 2, \ldots, d\}$. On note $P(\mathbf{d})$ le poset des parties de $\mathbf{d}$ et $P_0(\mathbf{d})$ le sous-poset des parties non-vides de $\mathbf{d}$. Un cube dans une catégorie $\mathbf{C}$ est un foncteur $P(\mathbf{d}) \to \mathbf{C}$.

**Définition 2.2.** Un cube $X : P(\mathbf{d}) \to \mathbf{C}$ est dit cartésien si

$$X(\varnothing) \to \lim_{T \in P_0(\mathbf{d})} X(T)$$

est une équivalence. On a bien-sûr la propriét'e duale de cube cocartésien.

Un cube $X : P(\mathbf{d}) \to \mathbf{C}$ est dit fortement cocartésien si toutes ses faces de dimension au moins 2 sont cocartésiennes.

**Définition 2.3.** Un foncteur $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ est dit $d$-excisif (polynomial de degré $d$) si $F$ envoie tout cube fortement cocartésien sur un cube fortement cartésien.

**Exemple 2.4.** Un foncteur 0-excisif est un foncteur constant. Un foncteur 1-excisif est un foncteur excisif (i.e envoie carré cocartésien sur carré cartésien).

Un foncteur 1-excisif de $\mathbf{S}_*$ vers $\mathbf{Spec}$ est une théorie homologique réduite.

On note $\mathbf{Exc}^d(\mathbf{C}, \mathbf{D})$ l'infinie-catégorie des foncteurs $d$-excisifs de $\mathbf{C}$ vers $\mathbf{D}$. On note

$$P_d : \mathrm{Fun}(\mathbf{C}, \mathbf{D}) \to \mathbf{Ecx}^d(\mathbf{C}, \mathbf{D})$$

l'adjoint à gauche de l'inclusion. Cet adjoint existe par le théorème du foncteur adjoint (les foncteurs $d$-excisifs sont stables par limites et colimites filtrantes). On dispose d'un morphisme unité

$$F \to P_d(F)$$

pour tout foncteur $F$.

**Lemma 2.5.** *Un foncteur $d$-excisif est $d+1$ excisif.*

On en déduit par la propriété universelle que l'unité

$$F \to P_d(F)$$

se factorise à travers l'unité $F \to P_{d+1}(F)$. Par conséquent, on peut former la tour de Goodwillie

$$F \to \ldots \to P_{d+1}(F) \to P_d(F) \to \ldots \to P_1(F)$$

**Définition 2.6.** Si $F$ est un foncteur $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$, on note $D_d(F)$ et on appelle différentielle d'ordre $d$ de $F$ la fibre de la transformation naturelle

$$P_d(F) \to P_{d-1}(F)$$

**Définition 2.7.** Si $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ ont une notion de connectivité, on dit que $F$ est $\rho$-analytique si la connectivité de

$$F(X) \to P_d(F)(X)$$

tend vers l'infini avec $d$ lorsque $X$ est $\rho$-connexe.

En particulier, pour un foncteur $\rho$-analytique, l'application

$$F \to \lim P_d(F)(X)$$

est une équivalence pour les objets $\rho$-connectifs. Observons aussi que pour un foncteur $\rho$-analytique la connectivité de $D_dF(X)$ tend vers l'infini lorsque $d$ tend vers l'infini.

## 3. Une formule explicite pour $P_d$

Pour $T$ un ensemble fini et $X$ un objet de $\mathbf{C}$, on note $X * T$ la cofibre de l'application codiagonale

$$\bigvee_T X \to X$$

On dispose d'un foncteur

$$P(\mathbf{d}) : T \mapsto X \star T$$

qui est un cube fortement cocartésien.

Par exemple pour $d = 2$, on trouve le carré

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[d] \\ * \arrow[r] & \Sigma X \end{tikzcd}$$

Pour un foncteur $F$, on note $T_dF$ le foncteur défini par la formule

$$T_d(F)(X) = \lim_{T \in P_0(\mathbf{d+1})} F(X \star T)$$

**Théorème 3.1.** *On a la formule suivante pour tout foncteur $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$*

$$P_d(F)(X) = \mathrm{colim}(F \to T_d(F) \to T_dT_d(F) \to \ldots)$$

*Proof.* La partie difficile de ce théorème est de montrer que $T_d(F)$ est bien $d$-excisif. Une fois qu'on sait cela, on peut en déduire la propriété universelle de la manière suivante. Notons $Q_d(F)$ le foncteur donné par la colimite. Soit $G$ un foncteur $d$-excisif quelconque, considérons une transformation naturelle $F \to G$. En appliquant $Q_d$ à cette application, on trouve un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] \arrow[d] & Q_d(F) \arrow[d] \\ G \arrow[r] & Q_d(G) \end{tikzcd}$$

dans lequel l'application horizontale du bas est une équivalence (en effet comme $G$ est $d$-excisif, $G \to T_d(G)$ est une équivalence et donc $G \to Q_d(G)$ est une équivalence. Au final on a bien factorisé $F \to G$ à travers $Q_d(G)$. ☐

Ce théorème a plusieurs conséquences importantes.

**Proposition 3.2.** *Le foncteur $F \mapsto P_d(F)$ préserve les limites finies.*

*Proof.* En effet, il s'agit simplement d'observe que les limites finies peuvent êtres commutées entre elle et par ailleurs les colimites filtrantes commutent avec les limites finies. ☐

**Théorème 3.3.** *Pour tout $d$, la transformation naturelle*

$$P_d(F) \to P_d(F)$$

*est une fibration principale. C'est-à dire qu'on a un carré cartésien*

$$\begin{tikzcd} P_d(F) \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[d] \\ P_{d-1}(F) \arrow[r] & R_d(F) \end{tikzcd}$$

*Proof.* On montre que c'est déjà le cas pour l'application $T_d(F) \to T_{d-1}(F)$ puis on passe à la colimite. Voir le survey de Kuhn pour une idée de la preuve. ☐

En particulier, on observe que $D_d(F) \simeq \Omega R_d(F)$ et donc $D_d(F)$ est un espace de lacets. En fait on peut itérer ce raisonnement. On commence par observe que que $D_d(F)$ est $d$-excisif et que $P_{d-1}(D_d(F)) = *$ (voir Proposition 4.2). On a alors par la Proposition précédente une suite fibre

$$D_d(D_d(F)) \to P_d(D_d(F)) \to P_{d-1}(D_d(F))$$

dont on peut déduire que $D_d(D_d(F)) \simeq D_d(F)$. Maintenant en utilisant le fait que $D_d$ commute aux limites finies (comme fibre de deux foncteurs qui commutent aux limites finies), on trouve

$$D_d(D_d(F)) = D_d(\Omega R_d(F)) = \Omega(D_d(R_d(F)) = \Omega^2(R_d(R_d(F))$$

On déduit alors la Proposition suivante.

**Proposition 3.4.** *Soit $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ un foncteur, alors $D_d(F)$ est de la forme $\Omega^\infty D'_d(F)$ pour un certain foncteur $D'_d(F)$ naturel en $F$.*

**Remark 3.5.** On peut déduire de ce théorème que le foncteur identité ne peut pas être 0-analytique. En effet, si $X$ est dans le rayon de convergence du foncteur identité, alors $X$ est la limite d'une tour de fibrations principales dont la connectivité des fibres tend vers $+\infty$ et dont les fibres sont des espaces de lacets infinis. Un tel espace est forcément nilpotent. Goodwillie a montré que le foncteur identité est 1-analytique (i.e la tour de Goodwillie converge pour les espaces simplements connexes). Plus précisément, on peut montrer que la limite de la tour de Goodwillie de l'identité évaluée sur un espace $X$ est $\mathbb{Z}_\infty(X)$ (la complétion de Bousfield-Kan de $X$.

## 4. Foncteurs homogènes

**Définition 4.1.** On appelle foncteur homogène d'ordre $d$, un foncteur $d$-excisif et tel que $P_{d-1}(F) = *$.

**Proposition 4.2.** *Soit $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ un foncteur, alors $D_d(F)$ est homogène d'ordre $d$.*

*Proof.* D'une part $D_d(F)$ est $d$-excisif comme limite finie de foncteurs $d$-excisifs. D'autre part, il suffit d'appliquer $P_{d-1}$ à la suite fibre

$$D_d(F) \to P_d(F) \to P_{d-1}(F)$$

pour se convaincre que $P_{d-1}(D_d(F)) = *$. □

**Théorème 4.3.** *Soit $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ un foncteur homogène d'ordre $d$, alors $F$ est de la forme $\Omega^\infty F^{st}$ pour $F^{st}$ un foncteur homogène d'ordre $d$ à valeur dans $\mathbf{Sp}(\mathbf{D})$.*

*Proof.* Celà se déduit facilement du Théorème 3.3. □

On en déduit qu'il suffit de comprendre les foncteurs $d$-homogène à valeur dans une $\infty$-catégorie *stable*.

**Théorème 4.4.** *Soit $H : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ un foncteur homogène d'ordre $d$ avec $\mathbf{D}$ stable. Alors, il existe un foncteur $\tilde{H} : \mathbf{C}^d \to \mathbf{D}$ linéaire en chaque variable, tel que*

$$H(X) \simeq \tilde{H}(X, X \ldots, X)_{\Sigma_d}$$

En particulier si $\mathbf{C} = \mathbf{S}_*$ et $\mathbf{D} = \mathbf{Sp}$, un foncteur $F : \mathbf{S}^d \to \mathbf{Sp}$ linéaire en chaque variable est de la forme

$$(X_1, \ldots, X_d) \mapsto E \otimes \Sigma^\infty(X_1 \wedge \ldots \wedge X_d)$$

avec $E$ le spectre $\Sigma_d$-équivariant $F(S^0, S^0, \ldots, S^0)$. On pose alors la définition suivante.

**Définition 4.5.** Soit $F : \mathbf{S}_* \to \mathbf{Sp}$ ou $F : \mathbf{S}_* \to \mathbf{Sp}$ un foncteur. On pose $\partial_d(F)$ le spectre $\Sigma_d$-équivariant tel que

$$D_d(F)(X) = (\partial_d(F) \otimes (\Sigma^\infty X)^{\otimes_d})_{\Sigma_d}$$

on l'appelle la dérivée $d$-ième de $F$.

## 5. Exemples

5.1. **Mapping spaces.** On considère le foncteur $F_K : X \mapsto \Sigma^\infty Map(K, X)$ from $S_*$ to $S_*$ pour $K$ un CW-complexe fini.

**Proposition 5.1** (Arone)**.** *On a la formule*

$$P_d(F_K) = Map_{Surj^{op}_{\leq d}}(K^{\wedge -}, \Sigma^\infty X^{\wedge -})$$

En particulier, on en déduit un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} P_d(F_K)(X) \arrow[r] \arrow[d] & Map(K^{\wedge d}, \Sigma^\infty X^{\wedge d}) \arrow[d] \\ P_{d-1}(F_K)(X) \arrow[r] & Map(\Delta_{fat}(K), \Sigma^\infty X^{\wedge d}) \end{tikzcd}$$

et donc la formule suivante

$$\partial_d(F_K) = \mathbb{D}(K^{\wedge d}/\Delta_{fat}(K))$$

où $\mathbb{D}$ désigne le dual de Spanier-Whitehead. Par dualité d'Alexander, on peut montrer que ce spectre s'identifie à une désuspension de $\mathrm{Conf}_d(K)$.

5.2. **Algèbres commutatives.** On note **Alg** la catégorie des algèbres commutatives (non-unitaires). On considère le foncteur identié $\mathbf{Alg} \to \mathbf{Alg}$.

**Proposition 5.2.** *La stabilisation de* **Alg** *est la catégorie des spectres.*

**Théorème 5.3.** *L'approximation* 1*-excisive de l'identité est le foncteur*

$$TAQ(A) := A/A^2$$

*Plus généralement, l'approximation $n$-excisive de l'identité est le foncteur $A \mapsto A/A^n$.*

Le foncteur identité est 0-analytique (il converge pour les algèbres connexes).

**Théorème 5.4.** *On a la formule*

$$D_d(id)(A) = TAQ(A)^{\otimes d}_{\Sigma_d}$$

On peut déduire une preuve du scindement de Snaith de ce travail. Soit $Z$ un espace pointé, on note $Q(Z) = \Omega^\infty \Sigma^\infty(Z)$. On a une application

$$Z \to Q(Z)$$

qui induit une application

$$\Sigma^\infty(Z) \to \Sigma^\infty(Q(Z))$$

Le but est une algèbre commutative donc cette application s'étend en un morphisme dans **Alg**

$$\mathrm{Sym}(\Sigma^\infty(Z)) \to \Sigma^\infty(QZ)$$

**Théorème 5.5** (Snaith)**.** *Cette application est une équivalence pour $Z$ connexe.*

*Proof.* Puisque les deux membres de l'équation sont connexes, il suffit de montrer que cette application est une équivalence lorsqu'on applique $TAQ$. En effet, si tel est le cas, on pourra montrer inductivement que $P_d(id)$ appliqé à ce morphisme est une équivalence pour tout $d$ et cela impliquera le résultat voulu par convergence de la toute de Goodwillie du foncteur identité. Il est trivial que $TAQ(Sym(\Sigma^\infty(Z)) \simeq \Sigma^\infty(Z)$. On peut montrer également que $TAQ(\Sigma^\infty(QZ)) = \Sigma^\infty(Z)$. □

Université Sorbonne Paris Nord, Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications, CNRS (UMR 7539), 93430, Villetaneuse, France.

*Email address*: `horel@math.univ-paris13.fr`