

# Chapitre 3

## Homomorphismes d'espaces vectoriels.

Ou applications linéaires.

### 3.1 Définitions et exemples

**Définition 3.1** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels sur un même corps commutatif  $K$ . Une **application linéaire** (ou **homomorphisme**) de  $E$  dans  $F$  est une application  $u$  de  $E$  dans  $F$  telle que

1.  $\forall (x, y) \in E^2, u(x + y) = u(x) + u(y)$ ,
2.  $\forall x \in E, \forall \lambda \in K, u(\lambda x) = \lambda u(x)$ ,

Si  $F = E$ , on dit que  $u$  est un endomorphisme de  $E$ . Si  $F = K$ , on dit que  $u$  est une forme linéaire sur  $E$ . Un isomorphisme est une application linéaire bijective. Un automorphisme est un endomorphisme bijectif.

L'ensemble des application linéaires de  $E$  dans  $F$  se note  $\mathcal{L}(E, F)$ ; il est naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel.

**Remarque 3.1** Si  $u$  est un isomorphisme,  $u^{-1}$  en est également un.

**Remarque 3.2** Un homomorphisme est entièrement déterminé par sa donnée sur une famille génératrice. On peut ainsi représenter aisément  $u$  si l'on connaît une base de l'espace de départ et une base de l'espace d'arrivée. Prendre l'exemple de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$ .

**Propriétés 3.1**

1. Le composé de deux homomorphismes est un homomorphisme.
2. L'image d'un sous-espace vectoriel est un sous-espace vectoriel, l'image réciproque d'un sous-espace vectoriel est un sous-espace vectoriel.

**Théorème 3.1**

1. Si  $u$  est un homomorphisme de  $E$  dans  $F$ , l'ensemble des éléments  $x$  de  $E$  tels que  $u(x) = 0$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , appelé le noyau de  $u$ , et noté  $\text{Ker } u$ .
2. Si  $u$  est un homomorphisme de  $E$  dans  $F$ , l'ensemble des éléments  $u(x)$  pour  $x \in E$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ , appelé l'image de  $u$ , et noté  $\text{Im } u$ .

**Exemple 3.1**

1. Des exemples de la géométrie : l'identité et plus généralement toutes les homothéties vectorielles (non nulles) sont des automorphismes. Les symétries, rotations et similitudes vectorielles (non nulles) sont des automorphismes du plan ou de l'espace usuel.

2. Interpréter les hyperplans de  $\mathbb{R}^n$  et leurs intersections comme des noyaux.
3. Définir une application linéaire de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^m$  à l'aide des bases canoniques.
4. Dérivation d'une fonction. Trouver ses noyau et image.
5. Translation : à  $x \mapsto f(x)$  fait correspondre  $x \mapsto f(x + 1)$ .
6. Intégrale d'une fonction sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

7.  $f \mapsto f(a)$ . Trouver ses noyau et image.
8. Soit  $A$  un polynôme réel non nul. Montrer que l'application qui à un polynôme fait correspondre le reste de la division euclidienne par  $A$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}[X]$ . Trouver ses noyaux et image.

**Exercice 3.1** Soit  $m, n \geq 1$ . Alors,  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  est de dimension  $nm$ . On commencera par des petite valeurs de  $m$  ou  $n$ .

**Proposition 3.1** Un homomorphisme est injectif si et seulement si son noyau est réduit à zéro.

## 3.2 Applications linéaires et familles de vecteurs

**Théorème 3.2** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels sur  $K$ ,  $u$  un homomorphisme de  $E$  sur  $F$ . On a les propriétés suivantes :

1. si  $B$  est une famille génératrice dans  $E$ ,  $u(B)$  est génératrice dans  $u(E)$ ,
2. si  $B$  est une famille liée dans  $E$ ,  $u(B)$  est liée dans  $F$ ,
3. si  $u(B)$  est libre dans  $F$ ,  $B$  est libre dans  $E$ .

Attention l'image d'une famille libre n'est pas forcément libre.

**Exercice 3.2** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels sur  $K$ ,  $u$  un homomorphisme de  $E$  sur  $F$ . Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1.  $u$  injective,
2. pour toute famille libre  $B$ ,  $u(B)$  est libre,
3. Pour tous sous-espaces vectoriels  $F$  et  $G$  tels que  $E = F \oplus G$ ,  $u(E) = u(F) \oplus u(G)$ .

## 3.3 Le théorème d'isomorphisme

**Proposition 3.2** Soit  $u$  un homomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  dans un espace  $F$ . Soit  $E_1 = \text{Ker } u$  et  $E_2$  un supplémentaire de  $E_1$  dans  $E$ . Alors  $u$  induit un isomorphisme de  $E_2$  sur  $\text{Im } u$ .

**Démonstration** Par restriction l'application linéaire  $u$  induit une application linéaire  $\tilde{u}: E_2 \rightarrow \text{Im } u$ . Son noyau est  $\text{Ker } \tilde{u} = \text{Ker } u \cap E_2 = \{0\}$ . De plus,  $\tilde{u}$  est surjective. En effet, pour tout  $y \in \text{Im } u$ , il existe  $x \in E$  tel que  $u(x) = y$ . On peut décomposer  $x$  en  $x = x_1 + x_2$ , où  $x_1 \in \text{Ker } u$  et  $x_2 \in E_2$ . On a alors  $y = u(x_2) = \tilde{u}(x_2)$ . ■

**Théorème 3.3** Deux espaces de dimension finie  $E$  et  $F$  sont isomorphes si et seulement si ils ont même dimension.

## 3.4 Rang d'une application linéaire

Dans tout ce qui suit,  $E$  et  $F$  sont deux espaces vectoriels de dimension finie sur le même corps  $K$ .

**Théorème et définition 3.1** Soit  $f: E \rightarrow F$  une application linéaire. Alors  $f(E)$  est de dimension finie sur  $K$  et  $\dim_K f(E) \leq \dim_K E$ . On appelle rang de  $f$  la dimension de l'image de  $f$ , et on le note  $\text{rg } f$ .

Si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ , le rang de  $f$  est le rang du système de vecteurs  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ .

**Théorème 3.4** (théorème du rang) On a  $\text{rg } (f) = \dim(E) - \dim(\text{Ker } f)$ .

**Démonstration** Soit  $E'$  un supplémentaire dans  $E$  de  $\text{Ker } f$ . On a vu que  $f$  induit alors un isomorphisme entre  $\text{Im } f$  et  $E'$ . On a donc  $\text{rg } (f) = \dim(\text{Im } f) = \dim(E) - \dim(\text{Ker } f)$ . ■

**Remarque 3.3 (Lien avec le rang d'une famille de vecteurs)** Soit  $E$  un  $K$ -ev espace vectoriel de dimension finie et  $u_1, \dots, u_p$  des vecteurs de  $E$ . Soit  $f$  l'application de  $K^p$  dans  $E$  définie par  $f(\lambda_1, \dots, \lambda_p) = \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i$ . C'est un homomorphisme. Le rang de  $(u_1, \dots, u_p)$  est égal à  $\text{rg}(f)$ . Donc trouver  $\text{rg}(u_1, \dots, u_p)$  est équivalent à déterminer la dimension du noyau de  $f$ , ce qui revient à résoudre un système linéaire.

**Exemple 3.2** Les espaces suivants sont-ils isomorphes? (1)  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^4$ . (2)  $\mathbb{R}_5[X]$  et  $\mathbb{R}^5$ . (3)  $\mathbb{R}^m$  et  $\mathbb{R}^n$ ,  $n, m \geq 1$ .

**Corollaire 3.1** Soient  $E$  (de dimension  $n$ ) et  $F$  (de dimension  $p$ ) deux espaces vectoriels sur le même corps  $K$ .

1.  $\text{rg} f \leq \inf(n, p)$ ,
2.  $\text{rg} f = n$  si et seulement si  $f$  est injective,
3.  $\text{rg} f = p$  si et seulement si  $f$  est surjective.

En particulier si  $f$  est surjective, on a  $p \leq n$ .

**Corollaire 3.2** Soit  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire, et supposons que  $\dim E = \dim F$ . On a alors équivalence entre

1.  $f$  est injective,
2.  $f$  est surjective,
3.  $f$  est bijective.

**Exercice 3.3** – Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . On a

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Montrons le de deux façons.

- 1- On introduit  $F'$  et  $G'$  supplémentaires de  $F \cap G$  respectivement dans  $F$  et  $G$ . Montrer que  $F + G = F' \oplus G' \oplus F \cap G$ .
- 2- Considérer l'application de  $F \times G$  dans  $F + G$ ,  $(x, y) \mapsto x + y$ . Montrer qu'elle est linéaire, déterminer son image et son noyau. Conclure.

## 3.5 Projections et symétries

**Définition 3.2** Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $E$ , la projection  $p$  sur  $F$  parallèlement à  $G$  est définie comme suit : si  $x$  se décompose en  $y + z$  où  $y$  est dans  $F$  et  $z$  dans  $G$ , alors  $p(x) = y$ .

Prendre ici l'exemple trivial des droites portant la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ .

**Théorème 3.5** La projection sur  $F$  parallèlement à  $G$  est un endomorphisme. Son noyau est  $G$ , son image est  $F$ .

**Définition 3.3** Un projecteur est un endomorphisme idempotent, i.e. tel que  $p \circ p = p$ .

**Théorème 3.6** Soit  $p$  un projecteur. Alors  $p$  est la projection sur  $\text{Im}(p)$  parallèlement à  $\text{Ker}(p)$ .

**Définition 3.4** Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $E$ , la symétrie  $s$  par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$  est définie comme suit : si  $x$  se décompose en  $y + z$  où  $y$  est dans  $F$  et  $z$  dans  $G$ , alors  $s(x) = y - z$ .

Prendre ici l'exemple trivial des droites portant la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ .

**Théorème 3.7** La symétrie par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$  est un isomorphisme.

**Définition 3.5** Une involution est un endomorphisme  $s$  tel que  $s \circ s = Id$ .

**Théorème 3.8** Soit  $s$  une involution. Alors  $s$  est la symétrie par rapport à  $\text{Ker}(s - Id)$  parallèlement à  $\text{Ker}(s + Id)$ .

**Exercice 3.4** On travaille dans  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $D_1 = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  et  $D_2 = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ .

- (1) Vérifier que  $D_1$  et  $D_2$  sont supplémentaires.
- (2) Donner l'expression de la projection sur  $D_1$  parallèlement à  $D_2$ , et de la symétrie par rapport à  $D_1$  parallèlement à  $D_2$ .
- (3) Même question que (2) en échangeant les rôles de  $D_1$  et  $D_2$ .

**Exercice 3.5** – On considère dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$ , la droite vectorielle  $D$  engendrée par le vecteur  $(-1, 1, 2)$ , et l'ensemble  $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y - z = 0\}$ .

- 1- Montrer que  $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$ .
- 2- Déterminer l'expression de la projection sur  $P$  parallèlement à  $D$ . Faire de même pour la projection sur  $D$  parallèlement à  $P$ .
- 3- Déterminer l'expression de la symétrie par rapport à  $P$  parallèlement à  $D$ . Faire de même pour la symétrie par rapport à  $D$  parallèlement à  $P$ .
- 4- On adopte le point de vue inverse : à partir de l'expression analytique obtenue pour la projection sur  $P$  parallèlement à  $D$ , retrouver qu'il s'agit bien d'une projection.