Catégories stables

On se place secrètement dans le modèle quasi-cat, mais on essaie d'y faire référence le moins possible.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $\Delta^n \simeq N([n])$ est une ∞-catégorie dont on peut parler de façon synthétique.

Catégories pointées

déf : Une ∞-catégorie $\mathcal{C}$ est dite pointée s'il existe dans $\mathcal{C}$ un objet à la fois initial et terminal 0.

(objet nul)

Rq : Si $\mathcal{C}$ est pointée, alors $h\mathcal{C}$ l'est et les objets nuls de $\mathcal{C}$ sont exactement ceux qui le sont dans $h\mathcal{C}$.

$\longrightarrow$ deux objets nuls sont équivalents.

Mieux : la sous-cat pleine de $\mathcal{C}$ formée des objets nuls est un ∞-groupoïde contractile.

déf : Un foncteur $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ entre ∞-catégories pointées est dit réduit s'il préserve les objets nuls.

On note $\mathrm{Fun}_*(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ la sous-cat. pleine formée des foncteurs réduits.

Si $\mathcal{C}$ est une ∞-catégorie pointée, un morphisme nul est un 2-simplexe $\Delta^2 \to \mathcal{C}$ de la forme

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[dr] \arrow[d, phantom, "\|"] & \\ X \arrow[ur] \arrow[rr] & & Y \end{tikzcd}$$

(l'objet nul est fixé)

Si X et Y sont fixés, les morphismes nuls $X \to Y$ forment un ∞-groupoïde contractile, si bien que l'on peut parler du morphisme nul $X \to Y$.

Mieux : le foncteur de restriction

$$\{\text{morphismes nuls}\} \longrightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}$$

est une fibration triviale. ← a un sens synthétique : les ∞-cats sont des modèles homotopiques.

$\rightsquigarrow$ il existe en particulier essentiellement une seule section

$$\mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \{\text{morphismes nuls}\}$$

dém : Dans le modèle quasi-cat :

$$\begin{tikzcd} \left\{\begin{matrix}\text{morphismes}\\ \text{nuls}\end{matrix}\right\} \arrow[r] \arrow[d, "\sim"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathrm{Fon}(\Delta^2, \mathcal{C}) \arrow[d, "\wr"] \\ \mathcal{C}_{/0} \times \mathcal{C}_{0/} \arrow[r] \arrow[d, "\sim"'] & \mathrm{Fon}(\Lambda^2_1, \mathcal{C}) \\ \mathcal{C} \times \mathcal{C} & \end{tikzcd}$$

← car 0 est terminal et final

déf: Si $f : X \to Y$ est un morphisme de $\mathcal{C}$, une fibre de f est un carré cartésien :

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & X \arrow[d, "f"] \\ 0 \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

(diagramme indexé par $\Delta^1 \times \Delta^1$)

Dualement, une cofibre de f est un carré cocartésien :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\ulcorner", very near end] & \cdot \end{tikzcd}$$

Si les morphismes nuls possèdent des cofibres, on définit un foncteur réduit :

$$\Sigma : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$
$$X \longmapsto 0 \amalg_X 0$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\ulcorner", very near end] & \Sigma X \end{tikzcd}$$

De même, si les morphismes nuls possèdent des fibres, on pose :

$$\Omega : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$
$$X \longmapsto 0 \times_X 0$$

réduit

$$\begin{tikzcd} \Omega X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & 0 \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

Rq: si $\mathcal{C}$ est une 1-catégorie, $\Sigma X \simeq \Omega X \simeq 0$ pour tout X.

Supposons que les morphismes nuls aient une fibre et une cofibre dans $\mathcal{C}$!

Pour $X \in \mathcal{C}$, le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& \Omega\Sigma X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & 0 \arrow[d] \\
& 0 \arrow[r] & \Sigma X
\end{tikzcd}$$

permet de choisir une flèche

$$X \longrightarrow \Omega\Sigma X$$

unique à un choix contractile près.

On admet que ces flèches s'organisent en une transformation naturelle :

$$\eta : \mathrm{id} \longrightarrow \Omega\Sigma$$

De $\hat{m}$, on a une t. nat :

$$\varepsilon : \Sigma\Omega \longrightarrow \mathrm{id}$$

<u>Prop</u> : Les t. nat. η et ε sont respectivement l'unité et la counité d'une <u>adjonction</u>

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left, "\Sigma"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{C} \arrow[l, bend left, "\Omega"]
\end{tikzcd}$$

Catégories additives

<u>déf</u>. Une catégorie pointée $\mathcal{C}$ est dite <u>additive</u> si

(i) $\mathcal{C}$ possède les <u>produits</u> et <u>coproduits</u> finis, et ceux-ci coïncident au sens où "la" flèche

$$\begin{pmatrix} id_X & 0 \\ 0 & id_Y \end{pmatrix} : X \sqcup Y \longrightarrow X \times Y$$

est une <u>équivalence</u> pour tous X et Y.

(le morphisme $\begin{pmatrix} id_X & 0 \\ 0 & id_Y \end{pmatrix}$ est défini sans ambiguïté dans $h\mathcal{C}$)

On note indifféremment $X \oplus Y$.

(ii) Pour tout X, "la" flèche

$$\begin{pmatrix} id & id \\ 0 & id \end{pmatrix} : X \oplus X \longrightarrow X \oplus X$$

$$(x, y) \longmapsto (x+y, y)$$

est une <u>équivalence</u>.

<u>Rq</u>: $\mathcal{C}$ additive $\Leftrightarrow$ $\mathcal{C}$ possède les (co)prod. finis et $h\mathcal{C}$ est additive.

(pour $\mathcal{C}$ pointée)

<u>déf</u>: Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ entre catégories additives est dit <u>additif</u> s'il préserve les sommes finies.

(en particulier F additif $\Rightarrow$ F réduit)

<u>ex</u>: Si $\mathcal{C}$ est additive, alors

$$\Sigma : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$$

et

$$\Omega : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$$

sont <u>additifs</u>, en tant qu'adjoints à gauche / à droite respectivement.

Si $\mathcal{C}$ est additive, on définit une structure de monoïde commutatif sur $[X,Y] := \mathrm{Hom}_{h\mathcal{C}}(X,Y)$ pour $X,Y \in \mathcal{C}$ via

$$f+g := X \xrightarrow{\nabla} X \oplus X \xrightarrow{f \oplus g} Y \oplus Y \xrightarrow{\Delta} Y$$

pour $f,g : X \to Y$

(le neutre est $0 : X \to Y$)

Cette structure est naturelle en X,Y, au sens où elle respectée par la composition.

De plus, on vérifie que pour $X \in \mathcal{C}$, l'inverse dans $h\mathcal{C}$ de l'iso :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : X \oplus X \to X \oplus X$$

est nécessairement de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : X \oplus X \to X \oplus X$$

pour un certain morphisme $-1 : X \to X$ vérifiant
(*) $(-1) + 1 = 1 + (-1) = 0$ (dans $[X,X]$)

$\rightsquigarrow$ pour $f : X \to Y$, on définit

$$-f := X \xrightarrow{-1} X \xrightarrow{f} Y$$
$$\text{ou } X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{-1} Y$$

et $-f$ est l'opposé de f en vertu de (*)

$\Longrightarrow$ $[X,Y]$ est naturellement un groupe abélien.

(En fait, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ possède une structure naturelle d'∞-groupe abélien)

espace E_∞ groupoïque

Rq : Si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est additif, alors

$$F : [X,Y] \to [F(X), F(Y)]$$

est un morph. de groupes abéliens $\forall X,Y$.

Prop : Si $\mathcal{C}$ est une ∞-catégorie pointée possédant les (co)produits finis et t.q. les $\left| [X,Y] \right._{X,Y\in\mathcal{C}}$ sont munis de structures naturelles de groupes abéliens, alors $\mathcal{C}$ est additive. Les deux structures sur $[X,Y]$ coïncident.

dém : Il suffit de traiter le cas où $\mathcal{C}$ est une 1-catégorie.

Remarquons que $[0,0]=0$, si bien que le neutre de $[X,Y]$ est nécessairement $0 : X\to Y$ par naturalité.

Pour $X, Y \in \mathcal{C}$, on note

$$X \xrightarrow{i_X} X\sqcup Y \xleftarrow{i_Y} Y \quad \text{et} \quad X \xleftarrow{p_X} X\times Y \xrightarrow{p_Y} Y$$

On veut mq :

$$\alpha : X\sqcup Y \xrightarrow{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}} X\times Y$$

est inversible, d'inverse

$$\beta := i_X p_X + i_Y p_Y$$

On calcule

$$\beta\alpha i_X = i_X \overbrace{p_X\alpha i_X}^{=\mathrm{id}_X} + i_Y \underbrace{p_Y \alpha i_X}_{0 : X\to Y}$$

$$= i_X + 0 = i_X$$

de $\hat{m}$ $\beta\alpha i_Y = i_Y$, d'où $\underline{\beta\alpha = \mathrm{id}_{X\sqcup Y}}$.

De la $\hat{m}$ façon, on montre que $\underline{\alpha\beta = \mathrm{id}_{X\times Y}}$.

$$\Rightarrow \boxed{\beta = \alpha^{-1}}$$

Pour conclure, il faut établir que

$$X\oplus X \xrightarrow{\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}} X\oplus X$$

est un isomorphisme pour tout $X\in\mathcal{C}$.

En fait l'inverse est donné par la formule

$$X\oplus X \xrightarrow{\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}} X\oplus X$$

ie $i_1(p_1 - p_2) + i_2 p_2 : X\times X \to X\sqcup X$

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{C}$ est additive.

Si $f, g : X\to Y$, la naturalité de la loi de groupe garantit que

$$\begin{pmatrix}f&0\\0&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&0\\0&g\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}f&0\\0&g\end{pmatrix}}_{f\oplus g}$$

dans $[X\oplus X, Y\oplus Y]$. L'image par

$$(\nabla^*, \Delta_*) : [X\oplus X, Y\oplus Y] \to [X,Y]$$

de cette égalité s'écrit

$$f+g = \Delta\circ(f\oplus g)\circ\nabla$$

$\rightsquigarrow$ pas de nouvelle loi de groupe sur $[X,Y]$...

Catégories triangulées et stabilité

Un exemple de catégorie additive est la 1-catégorie $Ch(\mathcal{A})$ des complexes de chaînes sur une cat. abélienne $\mathcal{A}$.

Un outil fondamental en algèbre homologique est la suite exacte longue en homologie induite par une suite exacte courte de $Ch(\mathcal{A})$.

En fait, on récupère une suite exacte longue en homologie sous des hypothèses beaucoup plus souples, ce qui permet de travailler avec $\tilde{K}(\mathcal{A})$, $\tilde{D}(\mathcal{A})$ (localisations 1-catégoriques)
existe dans notre univers lorsque $\mathcal{A}$ est de Grothendieck

$\rightsquigarrow$ dans ces catégories, on a encore une notion de "suites exactes courtes", ou plutôt de triangles exacts.

On dit que $\tilde{K}(\mathcal{A})$, $\tilde{D}(\mathcal{A})$ ont une structure triangulée.

ex d'application :

Lemme (Vogt) : Si $f : C \to D$ est une éq. d'homotopie entre complexes de chaînes et si f^{-1} est un inverse homotopique, alors on peut trouver des homotopies

$$\xi : ff^{-1} \sim id_D \quad \text{et} \quad \eta : f^{-1}f \sim id_C$$

t.q. $\xi f \sim f\eta$.

2-homotopie

pas clair à la main

Pour la dém, $\tilde{K}(\mathcal{A})$ est triangulée donc $Cone(f)$ est contractile.

Regarder concrètement ce que signifie

$$h : id_{Cone(f)} \sim 0$$

en écrivant h matriciellement...

déf : Une <u>catégorie triangulée</u> est une 1-cat. additive $\mathcal{C}$, munie d'une <u>équivalence additive</u> :

$$T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$$

et de la donnée de <u>triangles exacts</u> :

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$$

t.q :

(i) $\forall X$, $\quad X \xrightarrow{id_X} X \to 0 \to TX$

est <u>exact</u>.

(ii) $\forall f : X \to Y$, il existe un triangle exact

$$X \xrightarrow{f} Y \to \circ \to TX$$

(iii) parmi les triangles, la prop. d'être exact est invariante par <u>isomorphisme</u>

(iv) Le triangle

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$$

est <u>exact</u> ssi

$$Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX \xrightarrow{-Tu} TY$$

l'est.

(v) Étant donné un morphisme partiel entre triangles exacts

$$\begin{tikzcd}
\circ \arrow[r] \arrow[d] & \circ \arrow[r] \arrow[d] & \circ \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\exists"] & T(\circ) \arrow[d] \\
\circ \arrow[r] & \circ \arrow[r] & \circ \arrow[r] & T(\circ)
\end{tikzcd}$$

il existe une flèche (dessinée en pointillé) faisant tout commuter.

(vi) Axiome de l'<u>octaèdre</u> ...

Question : comment on relève cette notion dans le contexte ∞-catégorique ?

Là où l'additivité était une propriété de $\mathcal{C}$, le fait d'être triangulée est une structure : comment garantir la cohérence des homotopies supérieures.

(dont l'axiome de l'octaèdre n'est que le premier échelon...)

Une solution particulièrement élégante, et l'un des grands succès du langage ∞-catégorique, est la notion d'∞-catégorie stable.

déf : Une ∞-catégorie pointée $\mathcal{C}$ est stable si :

(i) Tout morphisme de $\mathcal{C}$ possède à la fois une fibre et une cofibre

(ii) Un carré commutatif de la forme

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r] \arrow[d] & \cdot \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & \cdot \end{tikzcd}$$

est cartésien ssi il est cocartésien.

$\rightsquigarrow$ les suites fibres / cofibres coïncident : on parle de suites exactes.

Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ entre ∞-catégories stables est dit exact s'il est pointé et qu'il préserve les suites exactes.

Rq : Si $\mathcal{C}$ est stable et si I est un ensemble simplicial, alors $\mathrm{Fon}(I, \mathcal{C})$ est stable et les évaluations

$$ev_i : \mathrm{Fon}(I, \mathcal{C}) \to \mathcal{C}$$

sont exactes. (les (co)limites se calculent terme à terme)

Prop : Si $\mathcal{C}$ est stable, alors les foncteurs Σ et Ω sont des équivalences de catégories exactes inverses l'une de l'autre.

dém: Σ commute aux colimites et est réduit, donc est exact.

De m, Ω est exact car réduit et préserve les limites.

Pour $X \in \mathcal{C}$, on a des carrés exacts

$$\begin{tikzcd} \Omega X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & 0 \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & X \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} \Omega X \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\ulcorner"] & \Sigma\Omega X \end{tikzcd}$$

ce qui montre que la counité $\Sigma\Omega \to id$ est une éq. terme à terme

$\longrightarrow$ c'est une éq. naturelle

De même, l'unité $id \to \Omega\Sigma$ est une éq. naturelle.

Cor : Les 1-catégories stables sont les groupoïdes contractiles.

$\longrightarrow$ La stabilité n'a d'intérêt que dans le cas ∞-cat.

En fait, ce fait est caractéristique de la stabilité :

Prop : Si $\mathcal{C}$ est une ∞-cat. pointée alors LASSE :

(i) $\mathcal{C}$ est stable

(ii) tout morphisme de $\mathcal{C}$ possède une cofibre et $\Sigma : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ est une éq.

(iii) tout morphisme de $\mathcal{C}$ possède une fibre et $\Omega : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ est une éq.

On a des équivalences d'homotopies naturelles pointées

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\Omega(-),\Omega(-))$$
$$\simeq \Omega\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\Omega(-),-)$$

entre foncteurs $\mathcal{C}^{op}\times\mathcal{C} \to \underline{\mathrm{Esp}}$. ← ∞-cat des espaces.

En particulier pour $X,Y\in\mathcal{C}$, l'ensemble $[X,Y]$ possède une structure de groupe naturelle.

Or

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \simeq \Omega\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\Omega X,Y)$$
$$\simeq \Omega^n\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\Omega^n X,Y)$$

donc

morphisme de groupes par déf.

$$[X,Y] \simeq \pi_1(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\Omega X,Y))$$

morphisme de groupes (car induit par π_1)

$$\simeq \pi_1(\Omega^{n-1}\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\Omega^n X,Y))$$
$$\simeq \pi_n(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\Omega^n X,Y))$$

morphisme de groupes

$\rightsquigarrow$ $[X,Y]$ est m̂ naturellement un groupe abélien

(et la loi de groupe ne dépend pas du n que l'on choisit pour l'éq. d'homotopie $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \simeq \Omega^n\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\Omega^n X,Y)$)

Prop : Si $\mathcal{C}$ est une ∞-catégorie stable, alors $\mathcal{C}$ possède les (co)limites finies.

dém : $\mathcal{C}$ possède un objet nul, et $\mathcal{C}^{op}$ est stable
$\rightsquigarrow$ il suffit de mq $\mathcal{C}$ possède les produits fibrés $X \times_A Y$ pour $f : X \to A$ et $g : Y \to A$ dans $\mathcal{C}$.
Notons Q la cofibre de $X \xrightarrow{f} A$, et K la fibre de la composée $Y \xrightarrow{g} A \to Q$.

Si $\text{よ} : \mathcal{C} \hookrightarrow \mathrm{PSh}_{\mathcal{S}}(\mathcal{C})$ désigne le plongement de Yoneda, on peut former les carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & F \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \text{よ}(0) \arrow[d] \\
\text{よ}(Y) \arrow[r] & \text{よ}(A) \arrow[r] & \text{よ}(Q)
\end{tikzcd}$$

Or よ préserve les <u>limites</u>, donc en particulier les carrés cartésiens :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & 0 \arrow[d] \\
A \arrow[r] & Q
\end{tikzcd}
\quad \text{et} \quad
\begin{tikzcd}
K \arrow[rr] \arrow[d, "q"'] \arrow[drr, phantom, "\lrcorner", very near start] & & 0 \arrow[d] \\
Y \arrow[r] & A \arrow[r] & Q
\end{tikzcd}$$

$\longrightarrow$ F et G sont représentables par X et K respectivement.
On en déduit un carré cart :

$$\begin{tikzcd}
\text{よ}(K) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, "q_*"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \text{よ}(X) \arrow[d, "f_*"] \\
\text{よ}(Y) \arrow[r, "g_*"] & \text{よ}(A)
\end{tikzcd}$$

qui s'évalue pour $S \in \mathcal{C}$ en

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(S, K) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, "q_*"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(S, X) \arrow[d, "f_*"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(S, Y) \arrow[r, "g^*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(S, A)
\end{tikzcd}$$

autrement dit K réalise le <u>produit fibré</u> de f et g dans $\mathcal{C}$.

Cor : Si $\mathcal{C}$ est stable, alors $\mathcal{C}$ est additive.

(en particulier, on ne pouvait pas munir les $[X,Y]$ d'une autre structure naturelle de gp. ab.)

Cor : Si $\mathcal{C}$ est stable, alors les carrés cartésiens et cocartésiens coïncident.

dém : Étant donné un carré cartésien

$$(*) \quad \begin{tikzcd} X \times_A Y \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & X \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & A \end{tikzcd}$$

on le complète :

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & X \times_A Y \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & X \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\ulcorner", very near end] & Y \arrow[r] & A \end{tikzcd}$$

et le rectangle extérieur est cartésien, donc cocartésien

$\rightsquigarrow$ le carré $(*)$ est cocartésien.

Cor : Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ entre catégories stables est exact ssi il est réduit et s'il préserve les colimites finies (ou les limites finies).

dém : Supposons $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ exact. Alors F est réduit et il suffit pour conclure de mq F préserve les sommes amalgamées.

Étant donné un carré cocartésien $(*)$

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(**)"] & A \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & X \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & Y \arrow[r] & X \amalg_A Y \end{tikzcd}$$

alors F envoie $(**)$ et $(**)+(*)$ sur des suites exactes, donc $(*)$ sur un carré cocart.

Si $\mathcal{C}$ est stable, alors $h\mathcal{C}$ est additive et

$$h\Sigma : h\mathcal{C} \to h\mathcal{C}$$

est une équivalence.

En fait, $h\mathcal{C}$ est canoniquement triangulée :

les triangles exacts sont les triangles

$$X \xrightarrow{[u]} Y \xrightarrow{[v]} Z \xrightarrow{[w]} h\Sigma X$$

qui se relèvent en un diag. commutatif de $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near end] & Y \arrow[r] \arrow[d, "v"] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near end] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & Z \arrow[r, "w"'] & \Sigma X
\end{tikzcd}$$

Catégories dérivées

Question : est-ce que les exemples canoniques $\widetilde{K}(A)$, $\widetilde{D}(A)$ se relèvent en des ∞-catégories stables ?

déf : Une catégorie différentielle graduée est une catégorie enrichie sur $(Ch(\mathbb{Z}), \otimes)$

La loi de composition est donnée par convention pour nous par

$$\mathrm{Hom}(X,Y) \otimes \mathrm{Hom}(Y,Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X,Z)$$

(l'ordre dans le produit tensoriel compte, car $d(x \otimes y) = dx \otimes y + (-1)^{|x|} x \otimes dy$)

ex : si A est abélienne, alors $Ch(A)$ est canoniquement d.g., via

$$\underline{\mathrm{Hom}}(C,D)_n := \prod_{k \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_A(C_k, D_{k+n})$$

et la différentielle

$$df := f \circ d + (-1)^{n+1} d \circ f$$

pour $f \in \underline{\mathrm{Hom}}(C,D)_n$.

Nerf dg.

On note $\mathcal{P}$ la catégorie libre engendrée par le graphe d'objets $\mathbb{N}$ et d'arêtes $m \to n$ $(n, m \geq 0)$ définies par :

$$E(m,n) := \begin{cases} \{\text{parties de } [\![m+1, n-1]\!]\} & \text{si } m \leq n-1 \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

donc $E(m, m+1) = \{\emptyset\} \neq \emptyset$.

Pour $S \in E(m,n)$, on définit

$$\deg S := |S|$$

et deg se prolonge uniquement en

$$\deg : \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(m,n) \longrightarrow \mathbb{N}$$

en exigeant $\deg(g \circ f) = \deg(g) + \deg(f)$

donc $\deg(id) = 0$.

On définit $\mathbb{Z}[\mathcal{P}]$ la catégorie de m̂ objets que $\mathcal{P}$, mais de morphismes :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[\mathcal{P}]}(m,n) := \mathbb{Z}[\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(m,n)]$$

$m, n \geq 0$

$\mathbb{Z}$ - module gradué.

(et en prolongeant la composition par linéarité)

On définit des différentielles $\mathbb{Z}$-lin. :

$$d : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[\mathcal{P}]}(m,n) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[\mathcal{P}]}(m,n)$$

via :

(i) pour $S = \{s_1 < \dots < s_k\} \in E(m,n)$:

$$dS := \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \left(\{s_1, \dots, \hat{s_j}, \dots, s_k\} - \underbrace{\{\hat{s_j}, \dots, s_k\}}_{s_j \to n} \circ \underbrace{\{s_1, \dots, \hat{s_j}\}}_{m \to s_j} \right)$$

donc $d\emptyset = 0$.

(ii) pour $S \in E(m,n)$ et $T \in E(n,p)$:

$$d(T \circ S) := T \circ dS + (-1)^{\deg S} dT \circ S$$

(iii) pour $n \in \mathbb{N}$:

$$d(\mathrm{id}_n) := 0$$

On vérifie que d est de degré (-1), vérifie $d^2 = 0$ et la règle de Leibniz :

$$d(g \circ f) = g \circ df + (-1)^{\deg f} dg \circ f$$

pour f homogène, et g, f composables.

Il faut vérifier $d^2 S = 0$; c'est un calcul.

$\rightsquigarrow (\mathbb{Z}[\mathcal{P}], d)$ est une catégorie d.g.

Pour $n \geq 0$, on définit

$$[n]_{dg} := \mathbb{Z}[P]_{|\{0,\dots,n\}}$$

Un morphisme $\alpha : [m] \to [n]$ induit alors un foncteur d.g.

$$\alpha_* : [m]_{dg} \longrightarrow [n]_{dg}$$

donné par

$$\alpha_*(i) := \alpha(i) \quad \Big| \; i \in [m]$$

et

$$\alpha_*(S) := \begin{cases} \alpha(S) & \text{si } \alpha_{|\{i,j\}\cup S} \text{ est injective} \\ id & \text{si } S = \emptyset \text{ et } \alpha(i) = \alpha(j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \Bigg| \; \begin{array}{l} i<j \\ S \in E(i,j) \end{array}$$

(Il suffit de vérifier que c'est bien un foncteur dg. lorsque α est une face ou une dégénérescence. On calcule que $\beta_*\alpha_* = (\beta\alpha)_*$, donc les identités simpliciales sont automatiquement vérifiées)

On a ainsi construit un objet cosimplicial

$$\Delta^{\bullet}_{dg} : \Delta \longrightarrow \mathcal{C}at_{dg}$$

catégorie des petites catégories d.g.

Fait : La catégorie $\mathcal{C}at_{dg}$ des petites catégories d.g. est bicomplète.

On récupère par conséquent une adjonction

$$\begin{tikzcd} s\mathcal{E}ns \arrow[r, bend left, "\mathfrak{C}_{dg}[-]"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{C}at_{dg} \arrow[l, bend left, "N_{dg}"] \end{tikzcd}$$

avec $N_{dg} : \mathcal{C} \longmapsto ([n] \mapsto \mathrm{Fon}([n]_{dg}, \mathcal{C}))$.

Rq : - $[0]_{dg} = *$ $\rightsquigarrow$ $N_{dg}(\mathcal{C})_0 = Ob(\mathcal{C})$

- $\mathrm{Hom}_{[1]_{dg}}(0,1) = \{\emptyset\}.\mathbb{Z}$ chaînes de deg. 0

$\rightsquigarrow$ $N_{dg}(\mathcal{C})_1 = Mor(\mathcal{C})$

- On peut représenter $[2]_{dg}$ comme :

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dr, "\emptyset"] & \\ 0 \arrow[ur, "\emptyset"] \arrow[rr, "\emptyset{,}\{1\}"'] & & 2 \end{tikzcd}$$

et $d\{1\} = \underset{0\to 2}{\emptyset} - \underset{1\to 2}{\emptyset} \circ \overset{0\to 1}{\emptyset}$

autrement dit $N_{dg}(\mathcal{C})_2$ est l'ensemble des diagrammes (pas forcément commutatifs) de $\mathcal{C}$ de la forme

$$\begin{tikzcd} & \cdot \arrow[dr, "v"] & \\ \cdot \arrow[ur, "u"] \arrow[rr, "w"'] & & \cdot \end{tikzcd} \qquad u, v, w \in Mor(\mathcal{C})$$

munis d'une homotopie $vu \sim w$.

chaîne de degré 1

Prop : Si $\mathcal{C}$ est une catégorie d.g., alors $N_{dg}(\mathcal{C})$ est une ∞-catégorie.

déf : Si $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne, on définit

$$K(\mathcal{A}) := N_{dg}(Ch(\mathcal{A}))$$

Rq : La description des 0, 1 et 2-simplexes de $N_{dg}(-)$ permet une identification canonique

$$hK(\mathcal{A}) \simeq \tilde{K}(\mathcal{A})$$

En fait :

$$K(\mathcal{A}) = Ch(\mathcal{A})[\text{éq. d'homotopie}^{-1}]$$

(localisation ∞-cat.)

si bien que $K(\mathcal{A})$ vérifie la prop. universelle que vérifiait $\tilde{K}(\mathcal{A})$ dans le cadre ∞-catégorique.

L'iso. $hK(\mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} \tilde{K}(\mathcal{A})$ est obtenu par transposition de la flèche $K(\mathcal{A}) \to N(\tilde{K}(\mathcal{A}))$ créée par prop. universelle.

Thm : $K(\mathcal{A})$ est stable et la structure triangulée induite sur $hK(\mathcal{A})$ coïncide avec celle de $\tilde{K}(\mathcal{A})$.

déf : Si $\mathcal{A}$ est abélienne, on définit la catégorie dérivée de $\mathcal{A}$:

$$D(\mathcal{A}) := K(\mathcal{A})[\text{quasi-iso}^{-1}] \simeq Ch(\mathcal{A})[\text{q. iso}^{-1}]$$

(quitte à se placer dans un univers plus grand)

Thm : Si $\mathcal{A}$ est catégorie abélienne de Grothendieck

(ex : Mod-R)

alors $D(\mathcal{A})$ est localement petite, stable et

$$\underbrace{hD(\mathcal{A})}_{\substack{\text{obtenue par transposition} \\ \text{de } D(\mathcal{A}) \to N(\tilde{D}(\mathcal{A}))}} \longrightarrow \tilde{D}(\mathcal{A})$$ est une éq. de catégories triangulées.

Prop : Si $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne de Grothendieck, alors $K(\mathcal{A})$ et $D(\mathcal{A})$ sont présentables.

Stabilisation

déf : $\mathcal{C}, \mathcal{D}$: ∞-catégories

Un foncteur $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est dit excisif s'il envoie les carrés cocartésiens de $\mathcal{C}$ sur des carrés cartésiens de $\mathcal{D}$.

On note $\underline{\mathrm{Exc}}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ la sous ∞-cat. pleine de $\mathrm{Fon}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ formée des foncteurs excisifs.

Les foncteurs excisifs $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ sont en quelque sorte des foncteurs "affines".

Si $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ sont pointées, alors

$$\underline{\mathrm{Exc}}_*(\mathcal{C}, \mathcal{D}) := \underline{\mathrm{Exc}}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \cap \mathrm{Fon}_*(\mathcal{C}, \mathcal{D})$$

correspond pour cette intuition à des foncteurs "linéaires"

$\rightsquigarrow$ on peut s'attendre à ce que $\underline{\mathrm{Exc}}_*(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ soit stable.

Prop : Si $\mathcal{C}$ possède les colimites finies et si $\mathcal{D}$ possède les limites finies, alors $\mathrm{Exc}_*(\mathcal{C},\mathcal{D})$ est stable.

dém : "le" foncteur nul $0 : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est à la fois initial et final dans $\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{D})$, et manifestement excisif réduit

$\to$ $\mathrm{Exc}_*(\mathcal{C},\mathcal{D})$ est pointée.

Si $\mathcal{D}$ possède les I-limites, alors $\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ aussi et elles se calculent terme à terme.
le foncteur $\lim_I : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ préserve les carrés cartésiens, si bien que les I-limites existent dans $\mathrm{Exc}_*(\mathcal{C},\mathcal{D})$ et se calculent terme à terme.

$\to$ sous nos hypothèses, $\mathrm{Exc}_*(\mathcal{C},\mathcal{D})$ possède les limites finies.

En particulier, le foncteur
$$\Omega : \mathrm{Exc}_*(\mathcal{C},\mathcal{D}) \to \mathrm{Exc}_*(\mathcal{C},\mathcal{D})$$
existe, se calcule terme à terme, et
$$\mathrm{Exc}_*(\mathcal{C},\mathcal{D}) \text{ est stable ssi } \Omega \text{ est une éq.}$$

Si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est excisif alors $\Sigma^* F := F \circ \Sigma$ aussi, car Σ est cocontinu.
On en déduit un foncteur :
$$\Sigma^* : \mathrm{Exc}_*(\mathcal{C},\mathcal{D}) \to \mathrm{Exc}_*(\mathcal{C},\mathcal{D})$$

$\Omega = \Omega_*$ et Σ^* commutent, au sens où l'on dispose d'une éq. naturelle
$$\Omega_* \Sigma^* \simeq \Sigma^* \Omega_* \quad (F \mapsto \Omega F \Sigma)$$

Or, pour $X \in \mathcal{C}$:
$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & 0 \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & F(\Sigma X) \end{tikzcd}$$
d'où une éq. $F(X) \simeq \Omega F(\Sigma X)$. Ces équivalences s'assemblent en fait en une équivalence naturelle
$$\mathrm{id} \simeq \Omega_* \Sigma^* \simeq \Sigma^* \Omega_*$$

$\rightsquigarrow$ Ω et Σ^* sont des équivalences réciproques l'une de l'autre.

$\underline{\mathrm{Esp}}^{fin}$ est la complétion libre de $*$ par colimites finies.

On définit les <u>sphères</u> dans $\underline{\mathrm{Esp}}^{fin}_*$ de la façon suivante :

$$S^0 := * \amalg * \quad , \text{ et } \quad S^n := \Sigma S^{n-1} \quad \text{pour } n \geq 1$$

point base.

<u>déf</u> : Si $\mathcal{C}$ est une ∞-catégorie possédant les <u>limites finies</u>, alors on définit

$$\mathrm{Sp}(\mathcal{C}) := \underline{\mathrm{Exc}}_*(\underline{\mathrm{Esp}}^{fin}_*, \mathcal{C}_*)$$

$:= \mathcal{C}_{*/}$

possède les limites finies (se calculent dans $\mathcal{C}$ en oubliant $*$) et est pointée

Un objet de $\mathrm{Sp}(\mathcal{C})$ est appelé $\mathcal{C}$-<u>spectre</u>.

$$\underline{\mathrm{Sp}} := \mathrm{Sp}(\underline{\mathrm{Esp}})$$

∞-catégorie des spectres.

Un <u>spectre</u> $X : \mathrm{Esp}_*^{fin} \to \mathcal{C}_*$ dans une catégorie $\mathcal{C}$ induit un isomorphisme naturel

$$X \simeq \Omega X \Sigma$$

En particulier, l'évaluation sur les sphères fournit des équivalences

$$X(S^n) \simeq \Omega X(S^{n+1})$$

naturelles en X.

On en déduit un diagramme dans $\underline{\mathrm{Cat}}_\infty$:

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] \\
 & \mathcal{C}_* \arrow[d] \\
 & \vdots \arrow[d, "\Omega"] \\
 & \mathcal{C}_* \arrow[d, "\Omega"] \\
Sp(\mathcal{C}) \arrow[r, "ev_{S^0}"'] \arrow[ur, "ev_{S^1}"] \arrow[uuur, "ev_{S^n}"] & \mathcal{C}_*
\end{tikzcd}$$

2-cellule

puis une flèche canonique

$$Sp(\mathcal{C}) \to \lim(\mathcal{C}_* \xrightarrow{\Omega} \mathcal{C}_* \to \cdots)$$

Thm : Ce foncteur est une <u>équivalence</u> entre ∞-catégories.

Pour $X \in Sp(\mathcal{C})$:

$$\left| \begin{array}{l} X(S^0) \simeq \Omega^n X(S^n) \\ n \geq 0 \end{array} \right.$$

ce qui justifie de noter $\Omega^\infty : Sp(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}_*$ l'évaluation en S^0.

Rq : $\Omega_\infty : Sp(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}_*$ est une <u>équivalence</u> ssi $\mathcal{C}_*$ est stable en vertu du thm précédent.

Rq : Si $\mathcal{C}$ est <u>présentable</u>, alors $\mathcal{C}_*$ aussi et le diagramme

$$\mathcal{C}_* \xleftarrow{\Omega} \mathcal{C}_* \leftarrow \cdots$$

vit dans Pr^R or l'oubli $Pr^R \to Cat_\infty$ préserve les limites et Pr^R est bicomplète

$\rightsquigarrow Sp(\mathcal{C})$ est <u>présentable</u>.

L'identification $Pr^R \simeq (Pr^L)^{op}$ fournit une identification

existe car $\mathcal{C}_*$ <u>bicomplète</u>

$$Sp(\mathcal{C}) \simeq \operatorname{colim}\left(\mathcal{C}_* \xrightarrow{\Sigma} \mathcal{C}_* \to \cdots\right)$$

calculée dans $\underline{\underline{Pr^L}}$!

Fait : Si $\mathcal{C}$ est une ∞-catégorie présentable, alors le foncteur

$$\Omega^\infty : Sp(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}_*$$

est accessible.

Étant donné qu'il préserve les limites (car elles se calculent terme à terme dans $Sp(\mathcal{C})$),
on a une adjonction :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}_* \arrow[r, bend left, "\Sigma^\infty"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & Sp(\mathcal{C}) \arrow[l, bend left, "\Omega^\infty"] \end{tikzcd}$$

Combinée à l'adjonction

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "(-) \sqcup *"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{C}_* \arrow[l, bend left, "\text{oubli}"] \end{tikzcd}$$

on obtient finalement :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "\Sigma^\infty_+"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & Sp(\mathcal{C}) \arrow[l, bend left, "\Omega^\infty"] \end{tikzcd}$$

On peut enfin énoncer la propriété universelle des spectres d'une ∞-cat présentable :

Prop : $\mathcal{C}, \mathcal{D}$: ∞-catégories présentables
Si $\mathcal{D}$ est stable, alors

$$(\Sigma^\infty_+)^* : Fun^L(Sp(\mathcal{C}), \mathcal{D}) \to Fun^L(\mathcal{C}, \mathcal{D})$$

est une équivalence de catégories.