Université Paris 13, Institut Galilée
Cycle Préparatoire Ingénieur Intégré, $1^{\text{ère}}$ année
Année universitaire 2016-2017, second semestre

Cours sur les équations différentielles linéaires scalaires

On donne ici un premier aperçu de la résolution des équation linéaire scalaires, qui seront revisitées à la lumière de l'étude des systèmes différentielles linéaires d'ordre 1 en application du cours d'algèbre. On se limitera à des équations d'ordre au plus 2, et on verra comment y ramener les équations de Bernoulli et de Riccatti.

1 Définitions. Principe de superposition des solutions

Définition 1 *Soit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $n \geq 1$. Soit $a_0, \ldots, a_n, b : I \to \mathbb{K}$ des fonctions, avec a_0 non identiquement nul. On appelle équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n, de coefficients $a_0, \ldots, a_n$ et de second membre b l'équation*

$$(E) \quad a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = b,$$

dont l'inconnue est une fonction n fois dérivable $y : I \to \mathbb{K}$.

Si le second membre b est nul, on dit que l'équation est homogène. L'équation homogène (E_0) obtenue en remplaçant b par 0 est dite équation homogène associée à (E).

L'équation (E) est dite résolue en $y^{(n)}$ si et seulement si a_0 est la fonction constante égale à 1 (en effet, on sait alors en trouver les solutions sous de bonnes hypothèses de régularité sur les coefficients). Elle est dite à coefficients constants si et seulement si les fonctions a_k sont constantes.

Définition 2
1. *Soit J un sous-intervalle non trivial de I. On appelle J-solution de (E) toute fonction $\varphi : J \to \mathbb{K}$, n fois dérivable et telle que*

$$\forall\ t \in J,\ a_0(t)\varphi^{(n)}(t) + a_1(t)\varphi^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n(t)\varphi(t) = b(t).$$

2. *On appelle point singulier de (E) tout réel $t_0 \in I$ tel que $a_0(t_0) = 0$.*

Résoudre, ou intégrer (E), c'est par définition obtenir toutes les solutions de (E), sur tous les sous-intervalles possibles de I.

Si l'on multiplie toutes les fonctions $a_0, \ldots, a_n, b$ par une même fonction h qui ne s'annule pas sur I, on ne change pas l'ensemble des solutions. Donc, si (E) est sans point singulier, on peut se ramener à une équation sous forme résolue en divisant chaque fonction par a_0.

Exemple 1 $I = \mathbb{R}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

$$(E) \quad (1 - t^2)y' - ty = 1.$$

Les points singuliers sont -1 et 1, et (E) s'écrit sous forme résolue

$$(E) \quad y' - \frac{t}{1 - t^2} y = \frac{1}{1 - t^2}$$

sur les intervalles $]-\infty, -1[$, $]-1, 1[$ et $]1, \infty[$.

Fixons J un sous-intervalle de I. On note $S_J(E)$ l'ensemble des J-solutions de (E).

On vérifie aisément les propriétés suivantes (on prendra le cas d'une équation du second degré).

Propriété 1 (Superposition des solutions) *Soit $\varphi \in S_J(E)$. Alors $S_J(E)$ est l'ensemble des $\varphi + \varphi_0$, avec $\varphi_0 \in S_J(E_0)$.*

On verra que cela signifie que ou bien $S_J(E)$ est vide, ou bien c'est un sous-espace affine d'espace vectoriel directeur $S_J(E_0)$ dans l'espace des fonctions de J dans $\mathbb{K}$. Notons que $S_J(E_0)$ n'est jamais vide car il contient la fonction identiquement nulle.

Propriété 2 (Superposition des seconds membres) *Supposons que $b = \sum_{j=1}^{k} b_j$, où les b_j sont des fonctions de I dans $\mathbb{K}$. Notons (E_j) l'équation (E) avec b_j à la place de b. Si $\varphi_j \in S_J(E_j)$ pour tout $1 \leq j \leq k$, alors $\sum_{j=1}^{k} \varphi_j \in S_J(E)$.*

Si φ est une J-solution de (E), alors, pour tout intervalle non trivial $J_1 \subset J$, $\varphi_{|J_1}$ est une J_1-solution de E, dont φ est un prolongement à J. On peut se demander s'il existe un intervalle $J_1 \supsetneq J$ sur lequel on puisse prolonger φ en une J_1-solution de (E). Cela conduit à la définition suivante.

Définition 3 *Soit J un sous-intervalle non trivial de I. Une J-solution φ de (E) est dite maximale s'il n'existe pas de sous-intervalle J_1 de I tel que $J \subsetneq J_1$ et φ se prolonge en une J_1-solution $\varphi_1 : J_1 \to \mathbb{K}$.*

Exemple 2 $I = \mathbb{R}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

$$(E) \quad (1-t^2)y' - ty = 0.$$

Toute solution sur $]-1,1[$ est de la forme $y(t) = C(1-t^2)^{-1/2}$, $C \in \mathbb{R}$. Elle est maximale si et seulement si $C \neq 0$. Sinon, elle est nulle et se prolonge $\mathbb{R}$.

Définition 4 *Si φ est une J-solution de (E), le graphe de φ, $\Gamma_\varphi = \{(t, \varphi(t)) : t \in J\}$ s'appelle courbe intégrale de (E).*

On verra que sous de bonnes hypothèses, deux courbes intégrales d'une équation linéaire du premier ordre ne se coupent que si elles sont confondues.

2 Equations différentielles linéaires d'ordre 1

2.1 Solutions des équations résolues homogènes

Théorème 1 *Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $a : I \to \mathbb{R}$ une fonctions continue. Soit t_0 un point de I.*

1. *Les I-solutions de l'équation résolue homogène*

$$(E) \quad y' = ay$$

sont les fonctions de la forme $\varphi : t \in I \mapsto C \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(u)\,du\right)$, où $C \in \mathbb{R}$. On a alors $C = \varphi(t_0)$. Toute I-solution est donc entièrement déterminée par la donnée de $\varphi(t_0)$. En particulier, si une solution s'annule en un point, elle est identiquement nulle.

2. Si J est un sous-intervalle de I, toute J-solution de (E) est la restriction à J d'une unique solution I-solution de (E). Les seules solutions maximales sont les I-solutions.

Exemple 3 *$I = \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$*

$$(E) \quad y' = ay.$$

Les $\mathbb{R}$-solutions de (E) sont les fonctions de la forme $t \mapsto C \exp(at)$, $C \in \mathbb{R}$.

Exemple 4 *$I =]-1, 1[$.*

$$(E) \quad y' = \frac{t}{1-t^2} y.$$

Les I-solutions sont de la forme $\varphi(t) = C/\sqrt{1-t^2}$, $C \in \mathbb{R}$.

Preuve du théorème (1) et (2) On vérifie aisément que les fonctions proposées sont bien solutions. Pour montrer qu'il n'y a que celles-ci, une première approche, locale, est la suivante.

Soit J un sous-intervalle non trivial de I. Supposons que φ soit une J-solution non nulle. Soit $t_0 \in J$ tel que $\varphi(t_0) \neq 0$. La solution φ étant continue, soit $\epsilon > 0$ tel que φ' ne s'annule pas sur l'intervalle $J_\epsilon = J \cap]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$. Alors, sur cet intervalle, on a

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = a(t),$$

donc

$$\log|\varphi(t)| - \log|\varphi(t_0)| = \int_{t_0}^{t} a(u)\, du,$$

i.e.

$$|\varphi(t)| = |\varphi(t_0)| \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(u)\, du\right),$$

et comme φ est de signe constant sur J_ϵ on a

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(u)\, du\right)$$

sur cet intervalle. On voit donc que toute solution est localement de la forme souhaitée.

Une approche globale consiste à considérer sur J

$$\psi(t) = \varphi(t) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(u)\, du\right).$$

Alors,

$$\psi'(t) = (\varphi'(t) - a(t)\varphi(t)) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(u)\, du\right) = 0.$$

Donc $\psi(t)$ est la constante $\varphi(t_0)$, d'où

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(u)\, du\right)$$

sur J. Il est clair que cette J-solution ne peut s'étendre que d'une unique façon en une I-solution donnée par la même expression.

2.2 Solution générale des équations résolues, variation de la constante

Théorème 2 *Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $a, b : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Soit t_0 un point de I.*

1. *Soit $t_0 \in I$. Soit φ_0 la solution de l'équation homogène*
$$(E_0) \quad y' = ay$$
qui vaut 1 en t_0, i.e. $\varphi_0(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t a(t)\, dt\right)$. Le solutions maximales de l'équation avec second membre
$$(E) \quad y' = ay + b$$
sont les fonctions de la forme $\varphi : t \in I \mapsto C(t)\varphi(t)$, où $C : I \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 et est solution de l'équation
$$C'(t) = b(t)/\varphi_0(t),$$
i.e. C est une primitive de b/φ_0. D'après le principe de superposition si ψ_0 est une solution de E, on peut aussi représenter l'ensemble des solutions comme
$$S_I(E) = \psi_0 + S_I(E_0) = \{\psi_0 + \varphi : \varphi \in S_I(E_0)\} = \{\psi_0 + C\varphi_0 : C \in \mathbb{K}\}.$$

2. *Toute solution est entièrement déterminée par sa valeur en t_0. En particulier Si J est un sous-intervalle de I, toute J-solution de (E) est la restriction à J d'une unique solution I-solution de (E).*

Preuve (1) Puisqu'on a su résoudre (E_0), il ne reste plus qu'à trouver une solution particulière de (E). Cette recherche va de fait fournir toutes les solutions. On cherche φ sous la forme
$$\varphi(t) = C(t)\varphi_0(t),$$
où $\varphi_0(t)$ est la solution particulière de (E_0) donnée par
$$\varphi_0(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t a(u)\, du\right)$$
et $C(\cdot)$ est dérivable. Alors, dire que φ est solution c'est dire que
$$(C\varphi_0)' = aC\varphi_0 + b \text{ soit } C'\varphi_0 = b \text{ car } C\varphi_0' = aC\varphi_0,$$
ou encore $C' = b\varphi_0^{-1}$.

Exemple 5 $I =]-1, 1[$.
$$(E) \quad y' = \frac{t}{1-t^2}y + \frac{1}{1-t^2}.$$
Les I-solutions de (E_0) sont les multiples de $\varphi_0(t) = 1/\sqrt{1-t^2}$. En utilisant la méthode de variation de la constante on détermine une solution particulière sous la forme $\varphi(t) = C(t)\varphi_0(t)$ avec
$$C(t) = \int_0^t b(u)\varphi_0(u)^{-1}\, du = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\, du = \arcsin(t).$$

(on a pris ici $t_0 = 0$).

Les $]-1,1[$-solutions de (E) sont donc les fonctions de la forme

$$\varphi_C : t \in]-1,1[\mapsto \frac{C + \arcsin(t)}{\sqrt{1-t^2}},\ C \in \mathbb{R}.$$

Théorème 3 *Sous les hypothèses du théorème précédent, on a vu que pour tout $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$, il existe une unique I-solution de (E) telle que $\varphi(t_0) = y_0$. Les courbes intégrales maximales de (E) forment donc une partition de $I \times \mathbb{R}$.*

2.3 Raccordement de solutions

Si l'on considère une équation différentielle du premier ordre à coefficients continus définis sur un intervalle non trivial ouvert I

$$(E) \quad a_0 y' + a_1 y = b$$

et ayant des points singuliers, l'ensemble des points t de I en lesquels a_0 est non nulle peut s'écrire comme une réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts $\bigcup I_i$ sur chacun desquels on peut résoudre (E) d'après ce qui précède. Se pose alors la question de savoir si l'on peut étendre ces solutions à des intervalles contenant des points singuliers.

Il n'y a pas de règle générale, mais le principe est d'essayer de raccorder de proche en proche les solutions obtenus sur deux intervalles contigus I_1 et I_2 séparés par un point singulier t_0. On peut raccorder une I_1-solution φ_1 et une I_2-solution φ_2 dès que

(1) $\lim_{t \to t_0^-} \varphi_1(t_0^-)$ et $\lim_{t \to t_0^+} \varphi(t_0^+)$ existent et sont égales. Soit alors φ le prolongement par continuité en t_0 obtenu. L'existence des limites prédentes impliquent aussi que les limites $\lim_{t \to t_0^-} \varphi_1'(t_0^-)$ et $\lim_{t \to t_0^+} \varphi'(t_0^+)$ existent, et donc que φ est dérivable à gauche et à droite.

et (2) Les dérivées à gauche et à droite de φ coïncident.

Exemple 6 $I = \mathbb{R}$.

$$(E) \quad (1-t^2)y' + ty = 1.$$

L'équation est résolue sur chacun des intervalles $I_1 =]-\infty, -1[$, $I_2 =]-1, 1[$ et $I_3 =]1, \infty[$.

On l'a déjà résolue sur $]-1,1[$.

Sur $]-\infty,-1[$ ou $]1,\infty[$, la résolution donne comme solutions de (E_0) les multiplies de $t \mapsto 1/\sqrt{t^2-1}$. Puis, comme solution générale les fonctions de la forme

$$\psi_C : t \mapsto \frac{C - \log|t + \sqrt{t^2-1}|}{\sqrt{t^2-1}},\ C \in \mathbb{R}.$$

(la variation de la constante demande de trouver $C(t)$ comme primitive de $-1/\sqrt{t^2-1}$).

Cherchons d'abord à raccorder des I_1-solutions à des I_2-solutions.

On se donne $\psi_{C_1} : t \in]-\infty,-1[\mapsto \frac{C_1 - \log|t+\sqrt{t^2-1}|}{\sqrt{t^2-1}}$ une I_1-solution et $\varphi_{C_2} : t \in]-1,1[\mapsto \frac{C_2 + \arcsin(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ une I_2 solution.

$\lim_{t \to -1^-} \psi_{C_1}(t)$ existe si et seulement si $C_1 = 0$, et vaut dans ce cas 1. En effet, dans ce cas, en posant $u = t^2 - 1$ on montre que $\log|t + \sqrt{t^2-1}| \sim -\sqrt{u}$ en 0.

$\lim_{t \to -1^+} \varphi_{C_2}(t)$ existe si et seulement si $C_2 = \pi/2$, et vaut dans ce cas 1. En effet, dans ce cas, en posant $\theta = \pi/2 + \arcsin(t)$ on a $\sqrt{1-t^2} = \sin(\theta)$.

On a donc un raccordement continu. Est-il dérivable? On calcule les limites des dérivées de ψ_0 et φ_0 en -1^- et -1^+ respectivement.

En -1^-, on observe, toujours avec $u = t^2 - 1$, que

$$\begin{array}{rcl} \psi_0'(t) & = & \frac{1}{u^{3/2}}(-\sqrt{u} - \sqrt{1+u}\log(\sqrt{1+u} - \sqrt{u})) \\ & = & \frac{1}{u^{3/2}}(-\sqrt{u} + \sqrt{1+u}(\sqrt{u} - u^{3/2}/6 + o(u^{3/2})) \\ & = & \frac{1}{u^{3/2}}(u^{3/2}/3 + o(u^{3/2})) \\ & \sim_{t\to -1^-} & 1/3 \end{array}$$

(on a utilisé le développement $\sqrt{1+u} = 1 + u/2 + O(u^2)$ et le développement limité à l'ordre 3 du logarithme en 1).

En -1^+, on observe, toujours avec $\theta = \pi/2 + \arcsin(t)$, que

$$\varphi_{\pi/2}'(t) \quad = \quad \frac{1}{\sin(\theta)^3}(\sin(\theta) - \theta\cos(\theta)) \sim_{t\to -1^+} 1/3.$$

On montrerait de même que l'on ne peut raccorder en 1 que $\varphi_{-\pi/2}$ et ψ_0.

On ne peut donc pas trouver de $\mathbb{R}$ solutions car une telle solution donnerait une $]-\infty, 1[$-solution et une $]-1, \infty[$-solution, qui devraient coincider sur $]-1, 1[$, mais $\varphi_{\pi/2} \neq \varphi_{-\pi/2}$.

(Remarque: la recherche de solutions développables en série entière en 1, et en -1 montre l'existence de ces raccordements, et qu'ils sont analytiques, mais c'est pour le moment hors programme).

Par conséquent, on a trouvé toutes les solutions maximales de (E). Ce sont les solutions trouvées sur I_1 quand $C \neq 0$, sur I_2 quand $C \neq \pi/2$, sur I_3 quand $C \neq 0$, et les deux solutions recollées, maximales respectivement sur $]-\infty, 1[$ et $]-1, \infty[$.

3 Equations de Bernoulli et de Riccatti

Comme dans la section précédente, nous nous limiterons à des fonctions à valeurs réelles.

3.1 Equations de Bernoulli

Il s'agit d'une équation différentielle scalaire de la forme

$$(B) \quad a(x)y' + b(x)y + c(x)y^\lambda = 0,$$

où a, b, c sont des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ et continues sur un intervalle non trivial I, avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $\lambda \neq 1$. Si $\lambda \in \mathbb{Z}_-^*$ on cherche des solutions à valeurs dans $\mathbb{R}^*$; si $\lambda \in \mathbb{N}^*$, on cherche des solutions à valeurs dans $\mathbb{R}$; si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on cherche des solutions à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

Résolution de (B)

On s'intéresse en premier lieu aux solutions qui ne s'annulent pas. Il suffit de prendre $z = y^{1-\lambda}$ comme nouvelle fonction inconnue. On a alors $z' = (1-\lambda)y'y^{-\lambda}$. Si y ne s'annule pas, après division de (B) par y^λ on obtient l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$\frac{1}{1-\lambda}a(x)z' + b(x)z + c(x) = 0$$

dont toute solution strictement positive g fournit la solution $f = g^{1/1-\lambda}$. Si g est une solution prenant des valeurs strictement négatives, alors on ne peut obtenir de solution f de (B) à valeurs réelles que si λ est un entier pair.

Exemple 7 Intégrons l'équation

$$(B) \quad y' + y + xy^2 = 0.$$

Posons $z = 1/y$. On se ramène à $z' - z = x$, dont les solutions maximales sont les $\varphi_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \lambda e^x - 1 - x$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Il nous faut étudier φ_λ pour savoir si elle s'annule.

Si $\lambda \leq 0$, alors φ_λ est strictement décroissante et a un unique 0, $x_\lambda \leq -1$. On trouve donc deux solutions maximales de (B) sur $]-\infty, x_\lambda[$ et $]x_\lambda, \infty[$ en inversant φ_λ.

Si $0 < \lambda < 1$, alors φ_λ décroît sur $]-\infty, -\log(\lambda)]$, et croît sur $[-\log(\lambda), \infty[$. de plus elle vaut $\log(\lambda) < 0$ en $-\log(\lambda)$. On peut en déduire qu'elle a exactement deux zéros x_λ et x'_λ, et donc que (B) a trois solutions maximales, sur $]-\infty, x_\lambda[$, $]x_\lambda, x'_\lambda[$ et $]x'_\lambda, \infty[$, dont on décrit facilement les variations.

Si $\lambda = 1$, on a le seul zéro $x_1 = 0$ et donc deux solutions maximales sur $\mathbb{R}^*_-$ et $\mathbb{R}^*_+$ respectivement.

Si $\lambda > 1$, φ_λ ne s'annule pas et on obtient une solution maximale sur $\mathbb{R}$.

On pourra représenter les courbes intégrales en déduisant leurs variations de celles des φ_λ.

Remarque sur l'unicité des solutions

Intéressons nous au cas spécial $y' = y^\lambda$. On peut montrer que si $\lambda \geq 1$ alors $f \equiv 0$ est l'unique solution positive de cette équation sur $\mathbb{R}_+$ avec condition initiale $f(0) = 0$. Cela est dû au fait que $y \mapsto y^\lambda$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.

Si $\lambda \in [0, 1[$, alors on a les deux solutions $f(x) = 0$ et $f(x) = (1-\lambda)^{1/1-\lambda} x^{1/1-\lambda}$.

3.2 Equations de Riccati

Il s'agit d'une équation différentielle scalaire de la forme

$$(R) \quad a(x)y' + b(x)y + c(x)y^2 + d(x) = 0,$$

où a, b, c, d sont des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ et continues sur un intervalle non trivial I. Supposons que l'on connaisse une solution φ_0. Alors en faisant le changement de fonction $z = y - \varphi_0$, on se ramène à l'équation de Bernoulli

$$a(x)z' + (b(x) + 2\varphi_0(x))z + c(x)z^2 = 0.$$

Exemple 8 *Résolvons*

$$(R)\ y' + (1-2x^2)y + xy^2 + x^3 - x - 1 = 0.$$

On peut montrer que z est solution de l'équation de Bernoulli de l'exemple précédent si et seulement si $y = z + x$ est solution de (R). Ici $\varphi_0(x) = x$ est solution de (R).

4 Equations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

4.1 Solutions des équation résolues homogènes, rappels

Théorème 4 *Soit $p, q \in \mathbb{R}$. Considérons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentiel du second ordre*

$$(E_0) \quad y'' + py' + qy = 0.$$

où l'inconnue est à valeurs réelles.

1. *Si $\Delta = p^2 - 4q > 0$, notons $x_1 = \frac{-p-\sqrt{\Delta}}{2}$ et $x_2 = \frac{-p+\sqrt{\Delta}}{2}$ les racines de l'équation caractéristique $x^2 + px + q = 0$, et posons $\varphi_1(t) = \exp(x_1 t)$ et $\varphi_2(t) = \exp(x_2 t)$.*

2. *Si $\Delta = p^2 - 4q = 0$, notons $x_1 = -p/2$ la racine double de l'équation $x^2 + px + q = 0$, et posons $\varphi_1(t) = \exp(x_1 t)$ et $\varphi_2(t) = t\exp(x_1 t)$.*

3. *Si $\Delta = p^2 - 4q < 0$, soit $\omega = \sqrt{-\Delta}/2$, $\varphi_1(t) = \cos(\omega t)\exp(-pt/2)$ et $\varphi_2(t) = \sin(\omega t)\exp(-pt/2)$.*

Dans tous les cas, les solutions maximales de (E_0) sont définies sur $\mathbb{R}$. Ce sont les fonctions de la forme

$$\varphi(t) = C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t), \ \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ la solution est entièrement déterminée par la donnée de $t_0 \in \mathbb{R}$ et de $(y(t_0), y'(t_0))$. Réciproquement, pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ et toute condition initiale $(y_0, y_0') \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution de (E_0) telle que $(y(t_0), y'(t_0)) = (y_0, y_0')$.

Preuve. On vérifie facilement que les fonctions proposées sont solutions. Montrons que réciproquement toute solution de (E_0) est de la forme $C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t)$.

Le raisonnement qui suit serait également valable pour une équation à coefficients non constants.

Supposons que ψ_2 est une autre solution. Posons $z = \psi_2/\varphi_1$. En écrivant que ψ_2 est solution de (E_0) on voit que

$$z'' - g(x)z' = 0 \text{ avec } g(x) = -(2\varphi_1' + p\varphi_1).$$

On sait complètement déterminer z' sous la forme $C_2\exp(G(x))$, avec $G' = g$, et donc z sous la forme $C_2 h(x) + C_1$, h ne dépendant que de φ_1. Ainsi, nécessairement on a $\psi_2(x) = C_2 h(x)\varphi_1(x) + C_1\varphi_1(x)$.

Ainsi, comme φ_2 est une solution de (E_0), on a $\varphi_2 = C_2 h(x)\varphi_1 + C_1\varphi_1$, avec $C_2 \neq 0$ car φ_2 n'est pas un multiple de φ_1. Donc $h(x)\varphi_1 = (\varphi_2 - C_1\varphi_1)/C_2$. Il s'ensuit que toute solution ψ_2 de (E_0) est de la forme $C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t)$.

Si maintenant $t_0 \in \mathbb{R}$ et la condition initiale (y_0, y_0') est donnée, l'existence et l'unicité d'une solution se montrent en déterminant C_1 et C_2 solutions du système

$$\begin{cases} C_1\varphi_1(t_0) + C_2\varphi_2(t_0) = y_0 \\ C_1\varphi_1'(t_0) + C_2\varphi_2'(t_0) = y_0' \end{cases}.$$

On peut pour cela tudier le wronskien: $W(t) = \varphi_1(t)\varphi_2'(t) - \varphi_2(t)\varphi_1'(t)$, qui est le déterminant du système, et solution de l'équation $W' = -pW$, donc de la forme $W(t) = C\exp(-pt)$. On a une solution unique pour tout t_0 si et seulement si C est non nulle. Or, le calcul du Wronskien en 0 montre que C n'est pas nulle.

4.2 Solution générale, variation des deux constantes

On s'intéresse à l'équation

$$(E) \quad y'' + py' + qy = b(x),$$

où b est une fonction continue d'un intervalle non trivial I dans $\mathbb{R}$. Rappelons qu'il ne reste plus qu'à savoir déterminer une solution particulière de l'équation.

4.2.1 Cas spéciaux

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $b(x) = P(x)e^{\lambda x}$, où $P(x)$ est un polynôme, on peut chercher une solution particulière du type $Q(x)e^{\lambda x}$, avec $deg(Q) = deg(P) + \alpha$, où α est l'ordre de multiplicité de λ comme racine de l'équation caractéristique ($\alpha \in \{0, 1, 2\}$).

Si $\lambda, \omega \in \mathbb{R}$ et $b(x) = P(x)e^{\lambda x}\cos(\omega t)$, on peut chercher une solution de la forme $Q_1(x)e^{\lambda x}\cos(\omega t)+ Q_2 e^{\lambda x}\sin(\omega t)$, où Q_1 et Q_2 sont des polynômes de degré $deg(P)+\alpha$, où α est l'ordre de multiplicité de $\lambda + i\omega$ comme racine de l'équation caractéristique.

Il en va de même si le second membre est en $P(x)e^{\lambda x}\sin(\omega t)$.

Si le second membre est une combinaison linéaire de fonctions du type précédent, on peut utiliser le principe de superposition des seconds membres.

4.2.2 Variation des deux constantes

On peut toujours opérer de la façon suivante. On note φ_1 et φ_2 les solutions fondamentales de (E_0). On cherche alors une solution sous la forme $\varphi(t) = C_1(t)\varphi_1(t) + C_2(t)\varphi_2(t)$ avec C_1 et C_2 dérivables sur I, et telles que l'on ait aussi $\varphi'(t) = C_1(t)\varphi_1'(t) + C_2(t)\varphi_2'(t)$, i.e.

$$\begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \varphi'(t) \end{pmatrix} = C_1(t) \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_1'(t) \end{pmatrix} + C_2(t) \begin{pmatrix} \varphi_2(t) \\ \varphi_2'(t) \end{pmatrix}.$$

Ceci est naturel puisque l'on a vu que les vecteurs $(\varphi_1(t), \varphi_1'(t))$ et $(\varphi_2(t), \varphi_2'(t))$ sont toujours linéairement indépendants.

Cela équivaut à avoir d'une part $C_1'(t)\varphi_1(t) + C_2'(t)\varphi_2(t) = 0$, et d'autre part, pour que φ soit solution de (E), $C_1'\varphi_1' + C_2'\varphi_2' = b$:

$$\begin{cases} C_1'(t)\varphi_1(t) + C_2'(t)\varphi_2(t) = 0 \\ C_1'(t)\varphi_1'(t) + C_2'(t)\varphi_2'(t) = b(t) \end{cases}.$$

Ce système a toujours une unique solution.

Exemple 9 *Cherchons les solutions à valeurs réelles de l'équation*

$$(E) \quad y'' + y = \frac{1}{\cos(2t)}$$

définie sur $\left]\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$. *Les solutions de* (E_0) *sont de la forme* $C_1\cos(t) + C_2\sin(t)$. *La variation des constantes donne*

$$\begin{cases} C_1'(t)\cos(t) + C_2'(t)\sin(t) = 0 \\ -C_1'(t)\sin(t) + C_2'(t)\cos(t) = \dfrac{1}{\cos(2t)} \end{cases},$$

d'où $C_1'(t) = \dfrac{-\sin(t)}{\cos(2t)}$ *et* $C_2'(t) = \dfrac{\cos(t)}{\cos(2t)}$.

On peut prendre $C_1(t) = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}\log\dfrac{\cos(t)+\sqrt{2}/2}{\cos(t)-\sqrt{2}/2}$ *et* $C_2(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\log\dfrac{\sqrt{2}/2+\sin(t)}{\sqrt{2}/2-\sin(t)}$. *On en déduit les* I*-solutions de* (E).