GROUPE DE GALOIS ET ESPACE DES NOEUDS

par

Geoffroy Horel

Le sujet de cette note est la suite spectrale de Vassiliev-Goodwillie-Weiss[(1)]. Cet objet calcule une approximation de l'homologie de l'espace des noeuds. Il a été prouvé par Lambrechts, Turchin et Volic dans [**LTV10**] que cette suite spectrale dégénère à la page E^2 lorsqu'on travaille à coefficients rationnels. Par ailleurs, Volić, dans [**Vol06**], a montré que l'invariant de noeud donné par la page E^2 de cette suite spectrale est l'invariant de type fini universel (ou plus précisément, le gradué associé de cet invariant pour la filtration par le degré). Il est conjecturé que ces deux résultats restent vrais lorsqu'on travaille à coefficients entiers.

Dans cette note, on s'intéresse spécifiquement à la première conjecture (à savoir la dégénérescence de la suite spectrale à coefficients entiers). Dans un travail en commun avec Pedro Boavida de Brito nous avons introduit un outil nouveau pour étudier ce problème. Nous construisons une action non-triviale du groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}$ sur cette suite spectrale. Cette action nous donne des informations sur les différentielles. On peut ainsi montrer qu'une différentielle donnée est nulle si on ignore la torsion pour des petits nombres premiers (nous renvoyons au Théorème 5.2 pour un résultat précis).

Cette apparition du groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}$ dans un problème de topologie différentielle peut sembler surprenante. En fait, comme on l'expliquera dans cette note, la suite spectrale de Goodwillie-Weiss est construite à partir des espaces de configurations finies de points dans $\mathbb{R}^3$ et de certaines applications naturelles de création et d'effacements de points entre ces espaces. La situation analogue des configurations de points dans $\mathbb{R}^2$ a été abondamment étudiée par les arithméticiens. En effet, l'espace des configurations de n points dans $\mathbb{R}^2$ a le type d'homotopie du classifiant de son groupe fondamental qui n'est autre que le groupe de tresses pures à n brins.

---

(1) Cette suite spectrale est originellement dûe à Vassiliev (*c.f.* [**Vas99**]). Goodwillie-Weiss ont développé un point de vue plus général sur cette suite spectrale et qui est aussi nettement plus commode pour les constructions expliquées dans ce papier. À la connaissance de l'auteur, il n'existe pas non plus de preuve complète dans la littérature de l'isomorphisme entre les deux suites spectrales, c'est pour ces raisons que nous donnons les deux attributions

D'un autre côté, ces espaces de configurations sont les points complexes de schémas définis sur les nombres rationels. On peut alors montrer que leur groupe fondamental coïncide, à complétion profinie près, avec le groupe fondamental géométrique de ces schémas. Ce dernier possède, par construction, une action du groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}$. En fait, cette action s'étend en une action sur la complétion profinie de l'opérade des petits disques de dimension 2. Pour passer de la dimension 2 à la dimension 3 ou n'importe quelle dimension supérieure, on utilise un résultat profond de la théorie des opérades : le théorème d'additivité.

Donnons quelques détails sur le contenu de cette note. La première section donne une introduction rapide au calcul des plongements de Goodwillie-Weiss. La seconde est une spécialisation de cette théorie au cas des plongements de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^d$ suivant les travaux de Sinha. La troisième section est une introduction au groupe de Grothendieck-Teichmüller et au groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}$ et de leurs actions sur les complétions profinies des groupes de tresses pures. Dans la quatrième section, on rappelle la théorie de la complétion des espaces à un nombre premier. Il s'agit d'un analogue en théorie de l'homotopie de la complétion des groupes. Enfin dans la cinquième section, on peut donner le résultat principal ainsi qu'un esquisse de preuve. Notons que seuls les résultats de cette dernière partie sont originaux. Ils sont dûs à Pedro Boavida de Brito et l'auteur. Une preuve complète apparaîtra sous peu.

Nous remercions Emmanuel Breuillard, Ricardo Campos, Julien Ducoulombier, Victor Turchin et le rapporteur anonyme pour leurs commentaires sur une première version de ce texte.

1. Calcul des plongements Goodwillie-Weiss

Soit $d \geq 3$. Fixons un plongement linéaire $\iota : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$. L'espace des longs noeuds dans $\mathbb{R}^d$ noté $\mathrm{Emb}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$ est l'espace des plongements différentiables $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ tel que $\phi = \iota$ sur le complémentaire d'un compact de $\mathbb{R}$. Le but de la théorie des noeuds est de comprendre l'ensemble des composantes connexes par arcs de cet espace lorsque $d = 3$. Considérer l'espace tout entier et pas simplement l'ensemble de ses composantes connexes est néammoins un point de vue fructueux. En effet on dispose d'un outil puissant pour étudier le type d'homotopie de l'espace $\mathrm{Emb}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$ appellé le calcul des plongements.

Pour des raisons techniques on va s'intéresser à l'espace $\overline{\mathrm{Emb}}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$ qui est, par définition, la fibre homotopique de l'application

$$\mathrm{Emb}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d) \to \mathrm{Imm}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d) \tag{1.1}$$

où $\mathrm{Imm}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$ désigne l'espace des immersions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^d$ qui sont égales à ι en dehors d'un sous-espace compact de $\mathbb{R}$. Explicitement, un point de $\overline{\mathrm{Emb}}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$ est la donné d'un point ϕ de $\mathrm{Emb}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$ et d'un chemin dans $\mathrm{Imm}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$ reliant ϕ à ι. On peut en fait montrer que l'application 1.1 est homotopiquement triviale ce qui implique une équivalence d'homotopie

$$\overline{\mathrm{Emb}}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d) \simeq \mathrm{Emb}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d) \times \Omega\mathrm{Imm}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d).$$

Par ailleurs, le théorème de Smale-Hirsch nous permet d'identifier à homotopie près l'espace $\mathrm{Imm}_c(\mathbb{R},\mathbb{R}^d)$ avec ΩS^{d-1}. Au final les deux espaces $\mathrm{Emb}_c(\mathbb{R},\mathbb{R}^d)$ et $\overline{\mathrm{Emb}}_c(\mathbb{R},\mathbb{R}^d)$ diffèrent par un facteur bien compris.

On peut approcher le type d'homotopie de $\overline{\mathrm{Emb}}_c(\mathbb{R},\mathbb{R}^d)$ en utilisant une technique introduite par Goodwillie et Weiss (*c.f.* **[GW99]** et **[Wei99]**) appellée calcul des plongements ou “embedding calculus” en anglais. Cette méthode prend comme donnée un foncteur contravariant F de l'ensemble ordonné des ouverts d'une variété différentiable M vers les espaces topologiques (ce foncteur doit satisfaire certaines hypothèses qu'on ignorera pour cette exposition rapide). Ce que produit le calcul des plongements est une tour d'approximations de ce foncteur

$$F \to \ldots \to T_kF \to T_{k-1}F \to \ldots \to T_1F.$$

Le terme T_kF de cette tour coïncide à homotopie près avec F sur les ouverts qui sont difféomorphes à une union disjointe de n disques ouverts avec $n \leq k$. Par ailleurs T_kF est déterminé par sa restriction aux ouverts de ce type contrairement à F en général. Plus précisément, le foncteur T_kF est défini par la formule suivante

$$T_kF(U) = \mathrm{holim}_{V\subset U} F(V)$$

où V parcourt l'ensemble des ouverts de M contenus dans U et qui sont difféomorphes à une union disjointes de n disques ouverts avec $n \leq k$.

Le théorème principal de cette théorie prouvé dans **[GK15]** est le suivant.

Théorème 1.1. — *Soit M et N deux variétés telles que* $\dim(N) - \dim(M) \geq 3$. *Alors le foncteur $U \mapsto \mathrm{Emb}(U,N)$ de la catégorie des ouverts de M vers les espaces topologiques est analytique. C'est à dire que pour tout U (en particulier pour M tout entier), on a une équivalence faible*

$$\mathrm{Emb}(U,N) \simeq \mathrm{holim}_k T_k \,\mathrm{Emb}(U,N).$$

Même si chacun des espaces $T_k \,\mathrm{Emb}(M,N)$ est difficile à comprendre, la différence entre deux termes consécutifs de cette tour, à savoir la fibre homotopique de l'application

$$T_k \,\mathrm{Emb}(M,N) \to T_{k-1} \,\mathrm{Emb}(M,N)$$

peut s'exprimer explicitement comme l'espace des sections d'une certaine fibration sur l'espace des configurations de k points sur M.

2. Calcul des plongements pour $\overline{\mathrm{Emb}}_c(\mathbb{R},\mathbb{R}^d)$

Rappellons qu'un espace cosimplicial est la donnée d'un foncteur covariant de la catégorie Δ des ensembles non-vides ordonnés vers la catégorie des espaces. En pratique, un tel foncteur est déterminé par une suite d'espaces X^n et par des applications appellées cofaces et codégénérescences. Les cofaces sont des applications

$$d^i : X^n \to X^{n+1}, i \in \{0,\ldots,n+1\}$$

et les codégénérescences sont des applications

$$s^i : X^n \to X^{n-1}, i \in \{1,\ldots,n\}.$$

Ces applications doivent satisfaire un certain nombre de relations appellées relations cosimpliciales.

Étant donné un espace cosimplicial $X^\bullet$, on peut lui appliquer le foncteur des chaînes singulières à cofficients dans un anneau R et obtenir un complexe cosimplicial. En prenant la somme alternée des applications induites par les cofaces, on obtient alors un complexe double et donc une suite spectrale $E^r_{s,t}(X^\bullet, R)$. Le terme E^1 de cette suite spectrale est donné par la formule

$$E^1_{s,t} = H_t(X^{-s}, R).$$

La différentielle $d^1 : E^1_{s,t} \to E^1_{s-1,t}$ est donnée par la somme alternée des applications induites par les cofaces en homologie. En général l'application d^r est de bidegré $(-r, r-1)$. Sous de bonnes hypothèses sur l'espace cosimplicial $X^\bullet$, cette suite spectrale converge vers l'homologie de l'espace $\mathrm{Tot}(X)$.

Dans son papier [**Sin06**] Sinha donne une description très agréable de la tour de Goodwillie-Weiss qui calcule le type d'homotopie de $\overline{\mathrm{Emb}}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$. Dans ce cas, on dispose d'un espace cosimplicial $K^\bullet_d$ dont la totalization coïncide avec la limite de la tour de Goodwillie-Weiss.

Il est facile de décrire le type d'homotopie de l'espace cosimplical $K^\bullet_d$. On a une équivalence faible $\mathrm{Conf}_n(\mathbb{R}^d) \simeq K^n_d$ où $\mathrm{Conf}_n(\mathbb{R}^d)$ désigne l'espace des configurations ordonnées de n points dans $\mathbb{R}^d$. À homotopie près, la i-ème codégénérescence est l'application

$$s^i : \mathrm{Conf}_n(\mathbb{R}^d) \to \mathrm{Conf}_{n-1}(\mathbb{R}^d)$$

qui oublie le i-ème point. Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, la coface

$$d^i : \mathrm{Conf}_n(\mathbb{R}^d) \to \mathrm{Conf}_{n+1}(\mathbb{R}^d)$$

remplace le i-ème point de la configuration par deux points très proches et contenus dans une droite parallèle à l'image de $\iota : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$. Enfin les cofaces d^0 et d^{n+1} ajoutent un point au voisinage de $-\infty$ ou $+\infty$ sur l'image de $\iota : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$.

Pour construire l'espace cosimplicial $K^\bullet_d$, on remplace les configurations de points par une compactification dûe à Kontsevich de ces espaces. Cette compactification est une variante de la compactification d'Axelrod-Singer [**AS94**, Section 5] qui est elle-même une version réelle de la compactification de Fulton-MacPherson. Les espaces obtenus ont le même type d'homotopie que les espaces de configurations mais ils supportent une structure cosimpliciale stricte (c'est à dire pour laquelle les identités cosimpliciales sont satisfaites strictement) contrairement aux espaces $\mathrm{Conf}_n(\mathbb{R}^d)$ sur lesquels la structure cosimpliciale est seulement une structure à homotopie près. Notons néammoins que la définition homotopique donnée ci-dessus est suffisante pour calculer la page E^1 et la différentielle d^1 de la suite spectrale.

On a le théorème suivant,

Théorème 2.1. — *Soit R un anneau. La suite spectrale $E^r_{s,t}(K^\bullet_d, R)$ converge vers $H_{s+t}(\overline{\mathrm{Emb}}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d), R)$ lorsque $d \geq 4$.*

Le cas $d = 3$ n'est pas couvert par ce théorème. Le problème principal est que, dans ce cas, le Théoreme 1.1 ne s'applique pas. La limite de la suite spectrale $E^r_{s,t}(K^\bullet_3, R)$ est un objet mystérieux à part quand $R = \mathbb{Q}$. Dans ce cas, la suite spectrale dégénère à la page E^2 et il existe une description combinatoire de celle-ci le long de la diagonale $s+t=0$ en termes de diagrammes de cordes (*c.f.* [**Vol06**]).

Remarquons que pour $d=2$, l'espace $\mathrm{Conf}_n(\mathbb{R}^2)$ est un espace asphérique, c'est à dire qu'il a le type d'homotopie du classifiant de son groupe fondamental. Le groupe fondamental de $\mathrm{Conf}_n(\mathbb{R}^2)$ est le groupe P_n des tresses pures à n brins. On peut donc donner une description purement algébrique de l'espace cosimplicial $K_2^\bullet$. En effet, on dispose de morphismes de groupes

$$s^i : P_n \to P_{n-1}$$

pour $0 \leq i \leq n$ qui oublient le i-ème brin de la tresse. Dans l'autre direction, on a des morphismes

$$d^i : P_n \to P_{n+1}.$$

Le morphisme d^i pour $1 \leq i \leq n$ remplace le i-ème brin par deux brins parallèles. Le morphisme d^0 (resp. d^{n+1}) ajoute un brin à gauche (resp. à droie) d'une tresse à n brins.

3. Le groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}$ et le groupe de Grothendieck-Teichmüller

On note $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ le groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}$. C'est le groupe des automorphismes de l'algèbre $\overline{\mathbb{Q}}$ des nombres algébriques. L'ensemble des racines de l'unité est un sous-groupe de $\overline{\mathbb{Q}}^\times$ isomorphe à $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Ce sous-groupe est stable par l'action de $\Gamma_{\mathbb{Q}}$. Le groupe des automorphismes de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est isomorphe à $\widehat{\mathbb{Z}}^\times$, le groupe des unités de la complétion profinie de $\mathbb{Z}$. Il existe donc un morphisme

$$\chi : \Gamma_{\mathbb{Q}} \to \widehat{\mathbb{Z}}^\times \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

qu'on appelle le caractère cyclotomique. La théorie de Galois implique que ce morphisme est surjectif : en effet, on peut considérer le corps K obtenu en ajoutant à $\mathbb{Q}$ toutes les racines de l'unité et montrer que le groupe de Galois de ce sous-corps est isomorphe à $\widehat{\mathbb{Z}}^\times$. On a par ailleurs un isomorphisme de groupe

$$\widehat{\mathbb{Z}}^\times \cong \prod_p \mathbb{Z}_p^\times$$

où le produit est pris sur l'ensemble des nombres premiers. Pour p un nombre premier, on note χ_p la composée de χ avec la projection $\widehat{\mathbb{Z}}^\times \to \mathbb{Z}_p^\times$. Le morphisme χ_p est donc lui aussi surjectif. Notons que cette surjectivité implique que $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ est infini non-dénombrable.

Pour M un $\mathbb{Z}_p$-module et n un élément de $\mathbb{Z}$, on peut construire une action de $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ sur M par la formule

$$\gamma.a = \chi_p(\gamma)^n a$$

avec $\gamma \in \Gamma_{\mathbb{Q}}$ et $a \in M$. On note $M(n)$ cette représentation de $\Gamma_{\mathbb{Q}}$.

Définition 3.1. — La représentation $M(n)$ de $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ est appelée la représentation cyclotomique de poids n.

Proposition 3.2. — *Soient M et N deux $\mathbb{Z}_p$-modules. Si $m-n$ n'est pas un multiple de $p-1$, alors, on a*

$$\mathrm{Hom}_{\Gamma_{\mathbb{Q}}}(M(m), N(n)) = 0.$$

Démonstration. — Soit $f : M \to N$ une application $\Gamma_{\mathbb{Q}}$-équivariante. Fixons a dans M. On a alors, pour tout γ dans $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ l'équation

$$\chi_p(\gamma)^m f(a) = \chi_p(\gamma)^n f(a).$$

Par surjectivité de χ_p, on en déduit que l'idéal annulateur de $f(a)$ contient $u^{n-m} - 1$ pour toute unité u de $\mathbb{Z}_p$. Si on choisit un u dans $\mathbb{Z}_p^\times$ dont l'image est un générateur de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$, alors $u^{n-m} \neq 1$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ puisque $n-m$ n'est pas un multiple de $p-1$. Il s'ensuit que $u^{n-m} - 1$ est une unité de $\mathbb{Z}_p$. On en déduit que l'idéal annulateur de $f(a)$ est $\mathbb{Z}_p$ tout entier ce qui est équivalent à dire que $f(a) = 0$. Puisque cette assertion est vraie pour tout $a \in M$, on a $f = 0$. □

On remarque que cette proposition n'utilise rien d'autre que la surjectivité de χ_p. On pourrait donc remplacer $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ par n'importe quel groupe se surjectant sur $\mathbb{Z}_p^\times$ et on aurait obtenu un résultat similaire. En fait, le caractère cyclotomique se factorise par un autre groupe appellé groupe de Grothendieck-Teichmüller et noté $\widehat{\mathrm{GT}}$. Ce dernier a été introduit par Drinfel'd dans le cadre de ses travaux sur les groupes quantiques (*c.f.* [**Dri90**]). Il est fortement relié au programme de Grothendieck visant à comprendre le groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}$ par son action sur les groupes fondamentaux des espaces de modules de courbes (*c.f.* [**Gro97**]).

Le théorème suivant résume certaines propriétés importantes du groupe $\widehat{\mathrm{GT}}$. Il est insuffisant pour caractériser $\widehat{\mathrm{GT}}$ mais une caractérisation de ce groupe en termes d'automorphismes de groupe de tresses peut se faire (*c.f.* [**LS94**]). Rappellons d'abord que pour un groupe G, on note $\widehat{G}$ sa complétion profinie qui est définie comme la limite inverse des quotients finis de G. Rappellons aussi que le groupe des tresses pures à deux brins P_2 est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

Théorème 3.3. — *Il existe un groupe $\widehat{\mathrm{GT}}$ agissant sur les complétions profinies $\widehat{P}_n$ des groupes de tresses pures. L'action de $\widehat{\mathrm{GT}}$ sur $\widehat{P}_n$ est fidèle si $n \geq 3$. Les morphismes $d^i : \widehat{P}_n \to \widehat{P}_{n+1}$ et $s^i : \widehat{P}_n \to \widehat{P}_{n-1}$ décrits à la fin de la section 2 sont $\widehat{\mathrm{GT}}$-équivariants. De plus, il existe un morphisme injectif $i : \Gamma_{\mathbb{Q}} \to \widehat{\mathrm{GT}}$. Enfin la composée*

$$\Gamma_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{i} \widehat{\mathrm{GT}} \to \mathrm{Aut}(\widehat{P}_2) \cong \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{Z}}) \cong \widehat{\mathbb{Z}}^\times$$

coïncide avec le caractère cyclotomique.

On peut aussi donner une description plus homotopique du groupe $\widehat{\mathrm{GT}}$.

Théorème 3.4. — *Le groupe $\widehat{\mathrm{GT}}$ est le groupe des automorphismes homotopiques de la complétion profinie de l'opérade des petits disques.*

Ce théorème est prouvé dans [**Hor17**]. Mentionnons que la complétion profinie des espaces est une version homotopique de la complétion profinie des groupes. En particuler, pour des groupes G raisonnables (par exemples le groupe des tresses pures), la complétion profinie de l'espace classifiant de G est simplement l'espace classifiant de la complétion profinie de G. Une subtilité supplémentaire sur laquelle nous ne nous étendrons pas est que la complétion profinie d'un espace n'est pas un espace mais un pro-espace.

4. Complétion des espaces

Dans cette section, on fixe p un nombre premier. On note $\mathbb{F}_p$ le corps à p éléments. Pour X et Y des espaces topologiques, on note $[X, Y]$ l'ensembles des morphismes de X vers Y dans la catégorie d'homotopie des espaces topologiques.

Définition 4.1. — Un espace X est dit p-complet si pour toute application $f : U \to V$ telle que $H_*(f, \mathbb{F}_p)$ est un isomorphisme, l'application induite

$$[V, X] \to [U, X]$$

est un isomorphisme.

Théorème 4.2 **(Bousfield, [Bou75]).** — *À équivalence faible près, il existe un unique endofoncteur L_p de la catégorie des espaces topologique et un foncteur* id $\to L_p$ *satisfaisant les deux conditions suivantes.*

1. *Pour tout X l'espace $L_p(X)$ est p-complet.*
2. *L'application $X \to L_p(X)$ induit un isomorphisme en homologie à coefficients dans $\mathbb{F}_p$.*

Par ailleurs, les espaces p-complets sont exactement ceux pour lesquels l'application $X \to L_p(X)$ est une équivalence faible.

Le foncteur L_p est appellé p-complétion. Cette terminologie est justifiée par la proposition suivante.

Proposition 4.3. — *Si X est un espace simplement connexe dont les groupes d'homotopie sont de type fini, l'application $X \to L_pX$ induit l'application canonique $\pi_*(X) \to \pi_*(X) \otimes \mathbb{Z}_p$ au niveau des groupes d'homotopie.*

La proposition suivante affirme que, pour un espace X raisonnable, le complexe des chaînes singulières sur X à coefficients dans $\mathbb{Z}_p$ peut se calculer de manière fonctorielle à partir de la p-complétion de X.

Proposition 4.4. — *Soit X un espace dont l'homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}_p$ est de type fini en chaque degré. Alors la composition suivante*

$$C_*(X, \mathbb{Z}_p) \to \lim_n C_*(X, \mathbb{Z}/p^n) \to \lim_n C_*(L_pX, \mathbb{Z}/p^n)$$

est un quasi-isomorphisme de complexes de chaînes.

Démonstration. — L'idée de la preuve est simple. Il s'agit de montrer que chacune des deux flèches est un quasi-isomorphisme. Pour la première, c'est une conséquence de l'hypothèse de finitude. Pour la seconde, on observe que les deux limites sont en fait des limites homotopiques puisque les morphismes de transition sont des épimorphismes. Il suffit donc de montrer que les deux tours sont quasi-isomorphes niveau par niveau. Le cas $n = 1$ fait partie de la définition de $L_p(X)$. Un raisonnement par récurrence utilisant les suites exactes longues de Bockstein permet de passer de $n = 1$ à n'importe quel n fini. □

5. Action Galoisienne sur la suite spectrale

Nous allons maintenant énoncer le résultat principal. Les deux théorèmes suivants peuvent s'énoncer sans faire appel à la théorie des opérades. Cette théorie joue cependant un rôle essentiel dans leur preuve.

Théorème 5.1. — *Soit $d \geq 3$, soit p un nombre premier. Il existe une action de $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ sur la p-complétion $L_p(K_d^\bullet)$ de l'espace cosimplicial de Sinha. L'action induite sur le groupe $H_{d-1}(K_d^2, \mathbb{Z}_p)$ est l'action cyclotomique de poids 1 (voir Définition 3.1).*

Avant de donner une idée de la preuve, précisons que l'action de $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ sur $H_{d-1}(K_d^2, \mathbb{Z}_p)$ découle de la Proposition 4.4.

Démonstration. — En fait, on construit une action de $\widehat{\mathrm{GT}}$, l'action de $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ s'en déduisant par restriction (voir Théorème 3.3). L'idée de la preuve est de partir de l'action de $\widehat{\mathrm{GT}}$ sur la complétion profinie de l'opérade des petits disques de dimension 2. Cette action est celle construite par Drinfel'd qui apparaît dans le Théorème 3.4. À partir de cette action, on peut construire une action sur la complétion profinie de l'opérades des petits disques de dimension d pour $d \geq 3$. Cette étape fait intervenir le théorème d'additivité. Ce théorème affirme qu'il existe une façon fonctorielle de construire l'opérade des petits disques de dimension $n + n'$ à partir de l'opérade des petits disques de dimension n et de celle des petits disques de dimension n. Ce résultat est prouvé dans [**Lur17**, Section 5.1.2]. Une version alternative qui est celle que nous utilisons se trouve dans [**BdBW18**]. Il faut par ailleurs vérifier que ce théorème est compatible aux complétions profinies. Ensuite, il faut observer que l'on peut construire l'espace cosimplicial K_d à partir de l'opérade des petits disques de dimension d. Cette observation se trouve dans le papier de Sinha [**Sin06**]. De même, on peut construire la complétion profinie de K_d à partir de la complétion profinie de l'opérade des petits disques de dimension d, en particulier, on obtient une action de $\widehat{\mathrm{GT}}$ sur la complétion profinie de l'espace cosimplicial K_d. Enfin, il faut observer que l'espace cosimplicial $L_p(K_d)$ peut s'obtenir fonctoriellement à partir de la complétion profinie de K_d. On obtient donc une action de $\widehat{\mathrm{GT}}$ sur $L_p(K_d)$. Finalement, on peut restreindre cette action le long de l'inclusion $\Gamma_{\mathbb{Q}} \to \widehat{\mathrm{GT}}$. Pour montrer que l'action induite sur le groupe $H_{d-1}(K_d^2, \mathbb{Z}_p)$ est l'action cyclotomique de poids 1, il faut étudier avec précision le théorème d'additivité en arité 2. □

Théorème 5.2. — *Soit $d \geq 3$, soit p un nombre premier. Soit R un anneau dans lequel les nombres premiers strictement plus petits que p sont inversibles. Alors les différentielles*

$$d^r : E^r_{s,t}(K^d_\bullet, R) \to E^r_{s-r,t+r-1}(K^d_\bullet, R)$$

avec $2 \leq r \leq (d-1)(p-1)$ sont nulles.

Démonstration. — Par un argument algébrique standard, il suffit d'étudier le cas où $R = \mathbb{Z}_p$. Dans ce cas, on a une action de $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ sur la suite spectrale par le théorème précédent. On peut alors montrer que la représentation $H_{n(d-1)}(K_d^s, \mathbb{Z}_p)$ est la représentation cyclotomique de poids n. Pour montrer cela, on utilise encore une fois la théorie des opérades. L'opérade des petits disques de dimension d à partir de laquelle est construit l'espace cosimplicial $K_d^\bullet$ a une homologie très ben comprise. En tant qu'opérade, elle est engendrée par des opérations d'arité 2. Il suffit donc de comprendre l'action de $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ sur l'homologie de K_d^2 ce qui est fait dans le théorème précédent. Notons également que l'homologie de K_d^n est concentrée en degrés divisibles par $(d-1)$. Nous avons donc une description complète de l'action de $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ sur la page E^1 de la suite spectrale.

Les différentielles préservent cette action donc l'action de $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ sur $E^r_{s,n(d-1)}$ est encore l'action cyclotomique de poids n. Par ailleurs, comme la différentielle d^r est de bidegré $(-r, t+r-1)$, la Proposition 3.2 nous dit qu'elle est nulle à part peut-être si $r-1$ est un multiple de $(d-1)(p-1)$. En particulier, les différentielles $d^2, \ldots, d^{(d-1)(p-1)}$ sont nulles. □

Références

[AS94] S. Axelrod & I. M. Singer – "Chern-Simons perturbation theory. II", *J. Differential Geom.* **39** (1994), no. 1, p. 173–213.

[BdBW18] P. Boavida de Brito & M. Weiss – "The configuration category of a product", *Proceedings of the American Mathematical Society* **146** (2018), no. 10, p. 4497–4512.

[Bou75] A. Bousfield – "The localization of spaces with respect to homology", *Topology* **14** (1975), p. 133–150.

[Dri90] V. Drinfel'd – "On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$", *Algebra i Analiz* **2** (1990), no. 4, p. 149–181.

[GK15] T. Goodwillie & J. Klein – "Multiple disjunction for spaces of smooth embeddings", *J. Topol.* **8** (2015), no. 3, p. 651–674.

[Gro97] A. Grothendieck – "Esquisse d'un programme", in *Geometric Galois actions, 1*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 242, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997, p. 5–48.

[GW99] T. Goodwillie & M. Weiss – "Embeddings from the point of view of immersion theory. II", *Geom. Topol.* **3** (1999), p. 103–118.

[Hor17] G. Horel – "Profinite completion of operads and the Grothendieck-Teichmüller group", *Adv. Math.* **321** (2017), p. 326–390.

[LS94] P. Lochak & L. Schneps – "The Grothendieck-Teichmüller group and automorphisms of braid groups", in *The Grothendieck theory of dessins d'enfants (Luminy, 1993)*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 200, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994, p. 323–358.

[LTV10] P. Lambrechts, V. Turchin & I. Volić – "The rational homology of spaces of long knots in codimension > 2", *Geom. Topol.* **14** (2010), no. 4, p. 2151–2187.

[Lur17] J. Lurie – "Higher algebra", 2017.

[Sin06] D. Sinha – "Operads and knot spaces", *J. Amer. Math. Soc.* **19** (2006), no. 2, p. 461–486.

[Vas99] V. Vassiliev – "Homology of i-connected graphs and invariants of knots, plane arrangements, etc", in *The Arnoldfest (Toronto, ON, 1997)*, Fields Inst. Commun., vol. 24, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, p. 451–469.

[Vol06] I. Volić – "Finite type knot invariants and the calculus of functors", *Compos. Math.* **142** (2006), no. 1, p. 222–250.

[Wei99] M. Weiss – "Embeddings from the point of view of immersion theory. I", *Geom. Topol.* **3** (1999), p. 67–101.

Geoffroy Horel, LAGA, Institut Galilée, Université Paris 13, 99 avenue Jean-Baptiste Clément, 93430 Villetaneuse, France • *E-mail :* horel@math.univ-paris13.fr
Url : geoffroy.horel.org