Université Sorbonne Paris Nord, Institut Galilée
Cycle Préparatoire Ingénieur Intégré, $1^{\text{ère}}$ année
Année universitaire 2023-2024, second semestre

Mathématiques
Fiche d'exercices et d'exemples n°1

Exercice 1. Montrer que les espaces suivants sont des espaces vectoriels.

$$\text{(i) } A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0 \right\}. \text{ (ii) } B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

$$\text{(iii) } C = \{x \in \mathbb{R} \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 : a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}.$$

$$\text{(iv) } D = \{\theta \in \mathbb{R} \mapsto a\cos\theta + b\sin\theta : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

$$\text{(viii) } E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f = a\exp(x) + b\cos(x) + c\sin(x), a, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{Q}\}.$$

Exercice 2. Montrer que les espaces suivants ne sont pas des espaces vectoriels

$$\text{(i) } A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=1 \right\}. \text{(ii) } B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1 \right\}.$$

$$\text{(iii) } C = \{a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3 : a_0 \in \mathbb{R}, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}_+\}. \text{ (iv) } E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{N}\}.$$

$$\text{(v) } D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x+3y=4, 2x-y=3, 6x+4y=10 \right\}.$$

Exercice 3. Montrer que $\mathbb{R}^2$ muni des opérations suivantes n'est pas un espace $\mathbb{R}$-vectoriel :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix} \text{ et } r \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rx \\ ry \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.

1. $\mathbb{R}^3$ muni des opérations $\oplus$ et $\odot$ suivantes est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}, x \oplus y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \lambda \odot x = \lambda x.$$

2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On munit le produit cartésien $E \times E$ de l'addition usuelle

$$(x, y) \oplus (x', y') = (x + x', y + y')$$

et de la multiplication externe par les complexes

$$(a + ib) \odot (x, y) = (ax - by, ay + bx).$$

Montrer que $E \times E$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Exercice 5. Déterminer $E + F$ dans les deux cas suivants:

(1) $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = a + bx^2, a, b \in \mathbb{R}\}$ et $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = cx,\ c \in \mathbb{R}\}\}$.

(2) E est un sous-espace vectoriel de F.

Exercice 6. Soit

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}, \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = 0\}$$

Trouver une famille génératrice de F, de G, de $F + G$. Déterminer $F + G$, $F \cap G$.

Exercice 7. (1) Les sous-espaces vectoriels F et G de l'exercice précédent sont-ils en somme directe ?
(2) Dans $\mathbb{R}^3$ montrer que les sous-espaces vectoriels

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0, x = 0\}, \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = 0\}$$

sont en somme directe.

Exercice 8. Les ensembles E et F sont-ils des sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^2$?

(1) $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$ et $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$.

(2) $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$ et $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$.

(3) $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \{0\}$.

(4) $E = F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$.

(5) $E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$ et $F = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\}$.

Exercice 9. – Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. On considère les sous-espaces vectoriels suivants de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: $U = Vect(1, \cos 2x, \cos 4x)$, $V = Vect(1, \cos^2 x)$ et $W = Vect(\cos^4 x)$. Montrer que $U = V \oplus W$.

2. Soit $P = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f \text{ paire}\}$ et $I = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f \text{ impaire}\}$. Montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = P \oplus I$.

Exercice 10. – Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P'(1) = 0\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid \deg P \leq 1\}$.

1- Montrer que $\mathbb{R}_3[X] = F \oplus G$.

2- Donner une méthode pour trouver la décomposition de tout polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ suivant cette somme directe.

Exercice 11. Les familles de vecteurs suivantes sont-elles génératrices dans $\mathbb{R}^3$?

$$\text{(i) } A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}. \text{ (ii) } B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\text{(iii) } C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \text{ (iv) } D = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}.$$

Exercice 12. Les familles de vecteurs suivantes sont-elles libres dans $\mathbb{R}^3$?

$$\text{(i) } A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 14 \end{pmatrix} \right\}. \text{ (ii) } B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\text{(iii) } C = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}. \text{ (iv) } D = \left\{ \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Exercice 13. Les familles de vecteurs suivantes sont-elles liées dans $\mathbb{R}_3[X]$?

(1) $\{3 - x + 9x^2, 5 - 6x + 3x^3, 1 + x - 5x^2\}$.
(2) $\{-x^2, 1 + 4x^2\}$.
(3) $\{2 + x + 7x^2, 3 - x + 2x^2, 4 - 3x^2\}$.
(4) $\{8 + 3x + 3x^2, x + 2x^2, 2 + 2x + 2x^2, 8 - 2x + 5x^2\}$.

Exercice 14. Les familles de vecteurs suivantes sont-elles des bases de $\mathbb{R}^3$?

$$\text{(i) } A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \text{ (ii) } B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\text{(iii) } C = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \text{ (iv) } D = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Exercice 15. Soit u, v, w trois vecteurs d'un espace vectoriel.

1. Montrer que la famille (u, v, w) est libre si et seulement si la famille $(u + v, u + w, v + w)$ est libre.

2. Que peut-on dire si l'on remplace la famille $(u + v, u + w, v + w)$ par $(u - v, u - w, v - w)$ dans la question précédente ?

Exercice 16. Trouver v tel que A soit une base de B.

(1) $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v \right\}, B = \mathbb{R}^2.$

(2) $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v \right\},\ B = \mathbb{R}^3.$

(3) $A = \{X, 1 + X^2, v\},\ B = \mathbb{R}_2[X].$

Exercice 17. Montrer que la famille $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ est $\mathbb{Q}$-libre.

Exercice 18. Montrer que la famille $\{t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(\lambda t)\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est $\mathbb{R}$-libre. Montrer qu'il en est de même de la famille $\{t \in \mathbb{R} \mapsto \cos(nt)\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{t \in \mathbb{R} \mapsto \sin((n + 1)t)\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 19. (1) Montrer que les polynômes $P_0 = X(X-1)$, $P_1 = X(X-2)$ et $P_2 = (X - 1)(X - 2)$ forment une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

(2) Soit $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$. Calculer les coordonnées de P dans la base (P_0, P_1, P_2).

Exercice 20. On travaille dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ on définit $f_a : x \mapsto x - a$ et $g_a : x \mapsto |x - a|$.

(1) Montrer que les fonctions f_0, f_1 et f_2 forment une famille liée.

(2) Montrer que les fonctions g_0, f_1 et f_2 forment une famille libre.

[Indication: étant donnée une combinaison linéaire de ces fonctions, on examinera simultanément les cas $x < 0$ et $x > 0$.]

(3) Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$ et toute suite de nombres réels deux à deux distincts $(a_1, \ldots, a_n)$, la famille $(g_{a_1}, \ldots, g_{a_n})$ est libre.

[Indication: étant donnée une combinaison linéaire de ces fonctions, on pourra poser $y = x - a_1$ pour se ramener au cas où g_0 est dans la famille de fonctions.]