Université Paris 13, Institut Galilée
Cycle Préparatoire Ingénieur Intégré, $1^{\text{ère}}$ année
Année universitaire 2017-2018, second semestre

Mathématiques, TD n°1

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes :

(1) $y' = -y/x$ (déterminer la solution qui vaut 2 en $x = 1$).
(2) $xy' - y = 0$.
(3) $xy' + 3y = 0$.
(4) $y' \tan(x) - y = 0$ (déterminer la solution qui vaut 1 en $x = \pi/6$).
(5) $x^2y' - y = 0$.

Exercice 2. Résoudre les équations différentielles suivantes :

(1) $y' \cos(x) + y \sin(x) = \cos(x) + x \sin(x)$.
(2) $y' = y \tan(x) + \cos(x)$.
(3) $y' + y = \cos(x) + \sin(x)$.
(4) $xy' - y = (x - 1)e^x$.
(5) $xy' - 2y = x^3$.
(6) $xy' + y = (e^x + e^{-x})/2$.
(7) $xy' + 2y = x/(1 + x^2)$.

Exercice 3. La population d'un pays présente les caractéristiques suivantes : par an, le taux des naissances est de 200 pour 1000 habitants, le taux de mortalité est de 15 pour 1000. 1000 étrangers s'installent dans le pays chaque année. On considère la population comme une fonction y du temps t (unité de temps = 1 an). L'année de référence ($t = 0$), la population est de 10 millions.

(1) Combien y aura-t-il d'habitants 10 ans plus tard ?
(2) Quand la population aura-t-elle doublé ?

Exercice 4. Résoudre les équations de Bernoulli suivantes:

(1) $xy' + 3y = x^2y^2$.
(2) $y' = y^3 - y/x$.
(3) $xy' = y + 3xy^3$.
(4) $xy' - y + y^3/x^3 = 0$.

Exercice 5. Soit l'équation de Ricatti suivante :

$$(1 - x^3)y' - y^2 + x^2y + 2x = 0.$$

(1) Chercher une solution particulière de la forme $y = ax^n$.
(2) Résoudre l'équation différentielle en se ramenant à une équation de Bernoulli.

Exercice 6. Déterminer, sur chacun des intervalles $I_1 =]-\infty, 0[$ et $I_2 =]0, \infty[$ les solutions de l'équation différentielle

$$(E) \quad x(x^2 + 1)y' - y(x^2 - 1) + 2x = 0.$$

Existe-t-il des solutions de (E) définies sur $\mathbb{R}$?

Exercice 7. On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad x(x+1)y' + (x+1)y = 1.$$

(1) Déterminer les solutions de (E) sur chacun des intervalles $I_1 =]-\infty, -1[$, $I_2 =]-1, 0[$ et $I_3 =]0, \infty[$.

(2) Démontrer que (E) admet une solution et une seule définie sur $]-1, +\infty[$.

(3) L'équation (E) admet-elle une solution sur $]-\infty, 0[$?

Exercice 8. Soit l'équation différentielle

$$(E) \quad x^3y' - y = 0.$$

(1) Intégrer (E) sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, \infty[$.

(2) Trouver les solutions de (E) définies sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9. Résoudre les équations différentielles suivantes, et donner la solution particulière satisfaisant aux conditions initiales données:

(1) $y'' + 2y' - 3y = 9; \quad y(1) = 1,\ y'(1) = 1.$

(2) $y'' + 2y' + 5y = -10; \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

(3) $y'' + 4y' + 4y = 9; \quad y(-1) = 1,\ y'(-1) = 2.$

Exercice 10. Résoudre l'équation différentielle $2y'' = x^3$.

Exercice 11. Résoudre les équations différentielles suivantes :

(1) $y'' - 2y' + y = xe^x$.

(2) $y'' + y' - 2y = 2x^2 - 3x + 1$.

(3) $y'' + 2y' + 5y = \cos(2x) + 2\sin(2x)$.

(4) $y'' + y = \cos(x) + \sin(2x)$.

(5) $2y'' - y' - 3y = 29e^{-x}\cos(x)$.

(6) $y'' - 5y' + 6y = xe^{4x}$.

Exercice 12. Dans un plan vertical, on lâche à l'instant $t = 0$ une famille $(P_\theta(0))_{\theta\in[-\pi/2,\pi/2]}$ de particules ponctuelles de même masse toutes situées en un même point O, sans vitesse initiale, de sorte que chaque P_θ soit soumise à un champ gravitationnel vertical de norme g et se déplace sur une droite faisant un angle égale à θ avec la verticale issue de O.

(1) Décrire le lieu géométrique des points $(P_\theta(t))_{\theta\in[-\pi/2,\pi/2]}$ pour $t > 0$.

(2) Même question si l'on suppose que chaque particule est soumise à une force de frottement proportionnelle à sa vitesse.

Exercice 13. Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{t-1}{t^2}e^{-t}.$$

Exercice 14. Soit l'équation différentielle

$$x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = -1.$$

(1) Vérifier que la fonction $x \mapsto 1/x^2$ en est une solution particulière.

(2) En posant $y = z/x^2$, résoudre l'équation.

Exercice 15. Déterminer l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables, telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on ait $f'(x) = f(1-x)$.