Université Sorbonne Paris Nord, Institut Galilée
Cycle Préparatoire Ingénieur Intégré, $1^{\text{ère}}$ année
Année universitaire 2023-2024, second semestre

Mathématiques
Fiche d'exercices n°2

Exercice 1. Trouver les équation cartésiennes ainsi qu'un espace supplémentaire pour les sous-espaces vectoriels suivants.

(1) $F = Vect\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$ dans $\mathbb{R}^3$.

(2) $F = Vect\left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/3 \\ 4/9 \\ -1/6 \end{pmatrix}\right)$ dans $\mathbb{R}^3$.

(3) $F = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right)$ dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 2. Déterminer une base pour les trois sous-espaces suivants de $\mathbb{R}^4$ définis par leurs équations cartésiennes

1. $x + y - 2z + 4t = 0$
2. $\begin{cases} x + y - z = 0, \\ x + 2y + 2z - t = 0 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x + 2y + 3z - 2t = 0, \\ 2x - y - 2z - 3t = 0 \\ 3x + 2y - z + 2t = 0 \end{cases}$

Exercice 3.

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et H un hyperplan de E. Montrer qu'il existe un vecteur x de E qui n'est pas dans H.
2. Montrer que la droite engendrée par x est un supplémentaire de H dans E.
3. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et F un sous-espace vectoriel. Montrer que F admet un supplémentaire.

Exercice 4. Les fonctions suivantes sont elles des homomorphismes? Si oui, déterminer leur noyau et leur image.

(1) $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ donnée par $a_0+a_1X+a_2X^2+a_3X^3 \mapsto a_1+2a_2X+3a_3X^2$.

Que dire si l'on considère la même application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$?

(2) $g : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ donnée par $b_0+b_1X+b_2X^2 \to b_0X+(b_2/2)X^2+(b_3/3)X^3$.

Exercice 5. (i) Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un automorphisme si et seulement si $f = k \cdot Id_{\mathbb{R}}$ avec $k \neq 0$.
(ii) Soit f un automorphisme de $\mathbb{R}$ tel que $f(3) = 7$. Trouver $f(-2)$.

Exercice 6. Les applications linéaires suivantes sont-elles des isomorphismes

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} \text{ donnée par } (a, b, c, d) \mapsto ad - bc.$$

$$g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \text{ donnée par } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a+b+c+d \\ a+b+c \\ a+b \\ a \end{pmatrix}.$$

$$h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}_3[X] \text{ donnée par } (a, b, c, d) \mapsto c + (c+d)X + (a+b)X^2 + aX^3.$$

$$k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}_3[X] \text{ donnée par } (a, b, c, d) \mapsto c + (c+d)X + (a+b+1)X^2 + aX^3.$$

Exercice 7. (i) Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est un automorphisme si et seulement si f est de la forme:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix},$$

où $ad - bc \neq 0$.
(ii) Soit f un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Trouver $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

Exercice 8. Soit E un K-espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que pour tout $x \in E$, les vecteurs x et $f(x)$ soient liés.
(1) Montrer que pour tout $x \in E$ il existe $\lambda_x \in K$ tel que $f(x) = \lambda_x x$.
(2) Montrer que si (x, y) est une famille libre de E, on a $\lambda_x = \lambda_y$ (considérer le vecteur $x + y$). En déduire que f est une homothétie.

Exercice 9. Soient U et V deux espaces vectoriels isomorphes par l'isomorphisme f ($f : V \to U$). Supposons que $V = V_1 \oplus V_2$. Montrer que $U = f(V_1) \oplus f(V_2)$.

Exercice 10. Trouver les images et les noyaux des applications linéaires suivantes

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_3[X] \text{ donnée par } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto a + aX + aX^2.$$

$$g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} \text{ donnée par } (a, b, c, d) \mapsto a + d.$$

$$h : \mathbb{R}^4 \to P_2 \text{ donnée par } (a, b, c, d) \mapsto a + b + c + dX^2.$$

Exercice 11. Soit f : l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par $f(a_0+a_1X+a_2X^2+a_3X^3) = a_0 + (a_0 + a_1)X + (a_2 + a_3)X^3$. Trouver $Ker(f)$et $Im(f)$.

Exercice 12. Soit U et V deux espaces vectoriels et f un homomorphisme V dans U. Montrer que $Ker(f) = \{0\}$ si et seulement si l'image par f d'une famille libre est toujours libre.

Exercice 13. Soit $m, n \geq 1$ et E et F des K-espaces vectoriels de dimensions respectives n et m. Montrer que $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension nm.

Exercice 14. Les espaces suivants sont-ils isomorphes ? (1) $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^4$. (2) $\mathbb{R}_5[X]$ et $\mathbb{R}^5$. (3) $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$, $n, m \geq 1$.

Exercice 15. On travaille dans $\mathbb{R}^2$. Soit $D_1 = Vect\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)$ et $D_2 = Vect\left(\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right)$.

(1) Vérifier que D_1 et D_2 sont supplémentaires.

(2) Donner l'expression de la projection sur D_1 parrallèlement à D_2, et de la symétrie par rapport à D_1 parallèlement à D_2.

(3) Même question que (2) en échangeant les rôles de D_1 et D_2.

Exercice 16. On considère dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, la droite vectorielle D engendrée par le vecteur $(-1, 1, 2)$, et l'ensemble $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x+2y-z = 0\}$.

(1) Montrer que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.

(2) Déterminer l'expression de la projection sur P parallèlement à D. Faire de même pour la projection sur D parallèlement à P.

(3) Déterminer l'expression de la symétrie par rapport à P parallèlement à D. Faire de même pour la symétrie par rapport à D parallèlement à P.

Exercice 17. On considère dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, les plans $P_1 = Vect\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ et $P_2 = Vect\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

(1) Montrer que $\mathbb{R}^4 = P_1 \oplus P_2$.

(2) Déterminer l'expression de la projection sur P_1 parallèlement à P_2. Faire de même pour la projection sur $_1$ parallèlement à P_2.

(3) Déterminer l'expression de la symétrie par rapport à P_2 parallèlement à P_1. Faire de même pour la symétrie par rapport à P_2 parallèlement à P_1.

Exercice 18. On considère l'endomorphisme Φ de $\mathbb{R}_3[X]$ qui à un polynôme P associe le polynôme $P' + P$. Déterminer le noyau et l'image de Φ.

Exercice 19. Soit $n \geq 1$ et $(x_0, \ldots, x_n)$ $n + 1$ nombres réels distincts.

(1) Montrer que l'application $\Phi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1}$, $P \mapsto (P(x_0), \ldots, P(x_n))$ est un isomorphisme.

(2) Soit $y = (y_0, \ldots, y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Déterminer $\Phi^{-1}(y)$.