Université Sorbonne Paris Nord, Institut Galilée
Cycle Préparatoire Ingénieur Intégré, $1^{\text{ère}}$ année
Année universitaire 2023-2024, second semestre

**Mathématiques**
**Fiche d'exercices n°3**

**Exercice 1.** Effectuer les calculs suivants :

$$1)\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad 2)\ \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$3)\ \begin{pmatrix} 7 & 0 & 9 & 10 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 12 & 0 & 13 & 14 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 6 & 8 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 8 & 0 & 14 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$4)\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad 5)\ \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$6)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad 7)\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \end{pmatrix}$$

$$8)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad 9)\ 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad 10)\ (-2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

**Exercice 2.** Calculer le produit $ABC$, où :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 3.** On pose $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer $(A+B)^2$.
2) Calculer $A^2 + B^2 + 2AB$. Que remarque-t-on ? Expliquer le phénomène.

**Exercice 4.** Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $A = T_{12}(a)$ et $B = T_{12}(-a)$ (avec $a \in \mathbb{R}$).

1) Calculer $AB$ et en déduire une expression de $B$ en fonction de $A$.
2) Sans calcul, déterminer le produit $BA$.
3) Interpréter les résultats précédents en terme d'opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice.

**Exercice 5.** Soient $a$, $b$ et $c$ des réels non nuls. On définit dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ les matrices $A = T_{12}(a)$ et $B = T_{23}(b)$.

1) À l'aide de l'exercice précédent, déterminer $A^{-1}$ et $B^{-1}$.

2) Calculer $ABA^{-1}B^{-1}$.

**Exercice 6.** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. En opérant sur les lignes, exprimer $B$, puis $C$, à l'aide de $A$ et des matrices élémentaires.

**Exercice 7.** Exprimer la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ comme produit de matrices élémentaires.

**Exercice 8.** Déterminer l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}$, où $u$, $v \in \mathbb{R}$.

**Exercice 9.** Donner un exemple de matrice carrée $A$ non nulle telle que $A^2 = 0$. Une telle matrice peut-elle être inversible ?

**Exercice 10.** Pour tout réel $x$, on pose $R(x) = \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$.

1) Déterminer $R(0)$.

2) Montrer que $R(x)R(y) = R(x+y)$ pour tous réels $x$ et $y$.

3) Déduire de ce qui précède une expression de $R(x)^{-1}$ pour tout $x$.

4) Donner une expression de ${}^{\mathrm{t}}(R(x))$.

**Exercice 11.** On note $I$ la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $A$ une matrice inversible telle que $I + A$ soit inversible.

0) Voit-on facilement comment simplifier $(A(I+A)^{-1}) \cdot (I + A^{-1})$ ?

1) Calculer $(I + A^{-1}) \cdot (A(I+A)^{-1})$.

2) En déduire $(A(I+A)^{-1}) \cdot (I + A^{-1})$.

**Exercice 12.** Déterminer l'ensemble de toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A + {}^{\mathrm{t}}A = 0$. Montrer que cet ensemble est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et en donner une base.

**Exercice 13.** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer $A^n$ pour tout $n \geq 1$.

**Exercice 14.** Soit la matrice

$$A := \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer $A^2$, puis $A^3$.

2) Démontrer que, pour tout $p \geq 1$, $A^{3p} = 8^p \cdot I$.

3) Soit $n \geq 1$ un entier. En écrivant $n$ sous la forme $3p + q$ avec $q \leq 2$, donner une expression de $A^n$.