Université Paris 13, Institut Galilée
Cycle Préparatoire Ingénieur Intégré, $1^{\text{ère}}$ année
Année universitaire 2023-2024, second semestre

Mathématiques
Fiche d'exercices n°4

Exercice 1. Soient E l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 3 et δ l'endomorphisme de E qui à un polynôme associe son polynôme dérivé.

1. Ecrire la matrice C de δ dans la base canonique $\mathcal{C}$ de E.
2. Ecrire la matrice B de δ dans la base $\mathcal{B} = (1, 1+X, 1+X^2, 1+X^3)$.
3. Ecrire la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$ et vérifier la formule du cours.

Exercice 2. 6 Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice U dans la base canonique :

$$U = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Ecrire la matrice U' de u dans la base : $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.
2. Quelle est la matrice P du changement de base ? Calculer P^{-1}.
3. En déduire la matrice U^n et les composantes α_n et β_n dans la base canonique du vecteur transformé de $(1, 0)$ par u^n.

Exercice 3. Soit T l'endomorphisme de $M_2(\mathbb{C})$ qui à une matrice A associe sa matrice transposée ${}^tA$.

1. Ecrire la matrice de T dans la base canonique de $M_2(\mathbb{C})$. Soit $\mathcal{S}$ le sous-espace de $M_2(\mathbb{C})$ des matrices symétriques ($A = {}^tA$). Soit $\mathcal{A}$ le sous-espace de $M_2(\mathbb{C})$ des matrices antisymétriques (${}^tA = -A$).
2. Donner une base de chacun des sous-espaces $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ et montrer que $M_2(\mathbb{C}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$.
3. Ecrire la matrice de T dans la base de $M_2(\mathbb{C})$ construite à partir des bases de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$.

Exercice 4. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Soit $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont A est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ $B_C = (e_1, e_2, e_3)$.

(a) Montrer que $\mathrm{Ker}(u)$ est une droite vectorielle et en donner un générateur a.

(b) Trouver un vecteur $b \in \mathbb{R}^3$ tel que $a = u(b)$.

(c) Montrer que $E_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 : u(x) = x\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et donner un vecteur non nul $c \in E_1$.

(d) Montrer que $B = (a, b, c)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(e) Déterminer la matrice T de u dans B.

(f) Donner la relation entre A, T et la matrice de passage Q de B_C à B.

2. Soit $B'_C = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}[X]$ l'application linéaire définie par

$$f(P) = (2+X+X^2)P-(1+2X+X^2+X^3)P'+\frac{1}{2}(-1+X+X^2+X^3+X^4)P''.$$

(a) Calculer $f(1)$, $f(X)$ et $f(X^2)$ et en déduire que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

(b) Déterminer la matrice A' de f dans B'_C.

(c) On pose $P_0 = 1 + X + X^2$, $P_1 = 1 + X$ et $P_2 = 2 + X + X^2$. Montrer que $B' = (P_0, P_1, P_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

(d) Donner la matrice T' de f dans la base B'.

(e) Donner la relation entre A', T' et la matrice de passage Q' de B'_C à B'.

3. Montrer que les matrices A et A' sont semblables.