Université Sorbonne Paris Nord, Institut Galilée
Cycle Préparatoire Ingénieur Intégré, $1^{\text{ère}}$ année
Année universitaire 2023-2024, second semestre

Mathématiques
Fiche d'exercices n° 5

Exercice 1. Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} i & 1 & -i \\ -i & 0 & 1 \\ -1 & 1 & i \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 117 & 1 \\ 2 & 116 & 1 \\ 3 & 115 & 1 \end{vmatrix}.$$

Exercice 2. Calculer les déterminants suivants en développant par rapport à une ligne ou une colonne:

$$\begin{vmatrix} -3 & 8 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 8 & -2 \\ -2 & 7 & 12 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Exercice 3. Calculer les déterminants suivants par des manipulations sur des lignes ou des colonnes :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & c & d \\ a & b & a & c \\ a & a & a & c \end{vmatrix}$$

avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$.

Exercice 4. Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$ les matrices suivantes sont-elles inversibles ?

$$A_m = \begin{pmatrix} m & 2 & m+1 \\ 2 & m & 2 \\ 2m & 2m+1 & 2m+2 \end{pmatrix}, \quad B_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Inverser les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 6. Trouver l'équation de l'hyperplan de $\mathbb{R}^3$ (resp. $\mathbb{R}^4$) engendré par les vecteurs :

$$u_1 = (0, -1, 1), \quad u_2 = (-2, 3, 2),$$

$$(\text{resp. } v_1 = (1, 3, 4, 5), \quad v_2 = (1, 2, 3, 4) \quad v_3 = (3, 1, 4, 2)).$$

Exercice 7. Soit $n \geq 2$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Caluler le déterminant de la matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ définie pour tout $(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2$ par $M_{i,i} = a$ et $M_{i,j} = b$ si $i \neq j$.

Exercice 8. Soit $n \geq 1$ et $(x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$. On considère le déterminant de Vandermonde

$$V_n(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

1. Calculer $V_n(x_1, \dots, x_n)$ pour $n = 1, 2, 3$.
2. Montrer que $V_n(x_1, \dots, x_n) = \left(\prod_{i=2}^{n}(x_i - x_1)\right) V_{n-1}(x_2, \dots, x_n)$.
3. En déduire $V_n(x_1, \dots, x_n)$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 9. Soient a b et c trois nombres complexes. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

1. Calculer son déterminant.
2. Déterminer le rang de cette matrice en fonction des valeurs de a, b et c.
3. On suppose que $a = c = 1$ et $b = 0$. Calculer l'inverse de A.

Exercice 10. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les racines λ_1 et λ_2 du polynôme $det(A - XI_2)$.
2. Trouver un vecteur directeur x_1 de $\mathrm{Ker}(A - \lambda_1 I_2)$ et un vecteur directeur x_2 de $\mathrm{Ker}(A - \lambda_2 I_2)$.
3. Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à $B = (x_1, x_2)$. Calculer P^{-1} et $P^{-1}AP$.
4. En déduire A^n pour tout entier $n \geq 0$.
5. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$ et

$$\forall n \geq 0, \quad \begin{cases} u_{n+1} = -\frac{1}{12}u_n + \frac{5}{6}v_n \\ v_{n+1} = \frac{5}{12}u_n + \frac{1}{3}v_n \end{cases}.$$

   Déterminer u_n et v_n en fonction de n, de u_0 et de v_0.
6. Quelles sont les limites de ces suites ?