Université Paris 13, Institut Galilée
Cycle Préparatoire Ingénieur Intégré, $1^{\text{ère}}$ année
Année universitaire 2017-2018, second semestre

Mathématiques
Fiche d'exercices 6

Exercice 1. Calculer les déterminants suivants

$$A = \begin{vmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$C = \begin{vmatrix} 2-x & 3 & 2 \\ 1 & 1-x & -1 \\ -1 & 1 & 3-x \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$E = \begin{vmatrix} 1+a & b & c \\ a & 1+b & c \\ a & b & 1+c \end{vmatrix}$$

Exercice 2. Calculer le déterminant suivant (sous forme factorisée).

$$V = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$$

Généraliser en dimension supérieure.

Exercice 3. Calculer le déterminant de la matrice de $M_n(\mathbb{C})$ suivante.

$$B_a = \begin{pmatrix} a & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a & a & \ddots & & 1 \\ \vdots & & \ddots & 1 & \vdots \\ a & & & a & 1 \\ a & a & \dots & \dots & a \end{pmatrix}$$

Déterminer le rang de B_a en fonction de a

Exercice 4. Soient a et b des nombres complexes. On pose D_n le déterminant de taille n suivant :

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & ab \\ & & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

(1) Calculer D_2 et D_3.
(2) Montrer que $D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-1}$.
(3) Déduire des questions précédentes l'équation $D_n = \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$.

Exercice 5. Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. On note $A(t)$ la matrice dépendant du paramètre réel t définie par $A(t)_{i,j} = A_{i,j} - t$.
(1) Montrer que le déterminant de A_t est un polynôme de degré ≤ 1 en t.
(2) En déduire le déterminant suivant

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & a & \dots & a \\ b & x_2 & \ddots & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & b & x_n \end{vmatrix}$$

Exercice 6. Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. Soit t un paramètre réel.
(1) Montrer que $det(A + tI_n)$ est un polynôme de degré n en t.
(2) En déduire que pour toute matrice A, et pour tout $\epsilon > 0$, on peut trouver une matrice A' inversible et telle que les coefficients de $A - A'$ soient tous dans l'intervalle $[-\epsilon, \epsilon]$.

Exercice 7. Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont entiers.
(1) On suppose que $det(A) \in \{-1, +1\}$. Montrer que l'inverse de A est à coefficients entiers.
(2) On suppose simplement que A est inversible. Montrer que tous les coefficients de l'inverse de A sont des nombres rationnels dont le dénominateur (sous forme irréductible) est $\leq |det(A)|$
(3) On souhaite résoudre le système $AX = B$ avec $B \in \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$. Montrer que les entrées de la solution sont des nombres rationnels dont le dénominateur (sous forme irréductible) est $\leq |det(A)|$.

Exercice 8. Soit A_n une suite de matrices inversibles qui converge vers une matrice A (c'est à dire que $(A_n)_{i,j}$ converge vers $A_{i,j}$ pour tout i et j.
(1) Montrer que la suite $det(A_n)$ converge vers $det(A)$.
(2) Montrer que si A est inversible, A_n^{-1} converge vers A^{-1}.