Université Sorbonne Paris Nord, Institut Galilée
Cycle Préparatoire Ingénieur Intégré, $1^{\text{ère}}$ année
Année universitaire 2023-2024, second semestre

Mathématiques, Equations différentielles

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes sur l'intervalle I :

(1) $y' = -y/x$, $I =]0, \infty[$.
(2) $xy' - y = 0$, $I = \mathbb{R}$.
(3) $xy' + 3y = 0$, $I =]0, \infty[$.
(4) $y' \tan(x) - y = 0$, $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
(5) $x^2 y' - y = 0$, $I =]0, \infty[$.

Exercice 2. Résoudre les équations différentielles suivantes sur l'intervalle I :

(1) $y' \cos(x) + y \sin(x) = \cos(x) + x \sin(x)$, $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
(2) $y' = y \tan(x) + \cos(x)$, $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
(3) $y' + y = \cos(x) + \sin(x)$, $I = \mathbb{R}$.
(4) $xy' - y = (x-1)e^x$, $I =]0, \infty[$.
(5) $xy' - 2y = x^3$, $I = \mathbb{R}$.
(6) $xy' + y = (e^x + e^{-x})/2$, $I =]0, \infty[$.
(7) $xy' + 2y = x/(1+x^2)$, $I =]0, \infty[$.

Exercice 3. La population d'un pays présente les caractéristiques suivantes : par an, le taux des naissances est de 200 pour 1000 habitants, le taux de mortalité est de 15 pour 1000. 1000 étrangers s'installent dans le pays chaque année. On considère la population comme une fonction y du temps t (unité de temps = 1 an). L'année de référence ($t = 0$), la population est de 10 millions.

(1) Combien y aura-t-il d'habitants 10 ans plus tard ?
(2) Quand la population aura-t-elle doublé ?

Exercice 4. Résoudre les équations de Bernoulli suivantes:

(1) $xy' + 3y = x^2 y^2$.
(2) $y' = y^3 - y/x$.
(3) $xy' = y + 3xy^3$.
(4) $xy' - y + y^3/x^3 = 0$.

Exercice 5. Soit l'équation de Ricatti suivante :

$$(1 - x^3)y' - y^2 + x^2 y + 2x = 0.$$

(1) Chercher une solution particulière de la forme $y = ax^n$.
(2) Résoudre l'équation différentielle en se ramenant à une équation de Bernoulli.

Exercice 6. Déterminer, sur chacun des intervalles $I_1 =]-\infty, 0[$ et $I_2 =]0, \infty[$ les solutions de l'équation différentielle

$$(E) \quad x(x^2+1)y' - y(x^2-1) + 2x = 0.$$

Existe-t-il des solutions de (E) définies sur $\mathbb{R}$?

Exercice 7. On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad x(x+1)y' + (x+1)y = 1.$$

(1) Déterminer les solutions de (E) sur chacun des intervalles $I_1 =]-\infty, -1[$, $I_2 =]-1, 0[$ et $I_3 =]0, \infty[$.

(2) Démontrer que (E) admet une solution et une seule définie sur $]-\infty, 1[$.

(3) L'équation (E) admet-elle une solution sur $]-\infty, 0[$?

Exercice 8. Soit l'équation différentielle

$$(E) \quad x^3y' - y = 0.$$

(1) Intégrer (E) sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, \infty[$.

(2) Trouver les solutions de (E) définies sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9. Résoudre les équations différentielles suivantes, et donner la solution particulière satisfaisant aux conditions initiales données:

(1) $y'' + 2y' - 3y = 9; \quad y(1) = 1,\ y'(1) = 1.$

(2) $y'' + 2y' + 5y = -10; \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

(3) $y'' + 4y' + 4y = 9; \quad y(-1) = 1,\ y'(-1) = 2.$

Exercice 10. Résoudre l'équation différentielle $2y'' = x^3$.

Exercice 11. Résoudre les équations différentielles suivantes :

(1) $y'' - 2y' + y = xe^x$.

(2) $y'' + y' - 2y = 2x^2 - 3x + 1$.

(3) $y'' + 2y' + 5y = \cos(2x) + 2\sin(2x)$.

(4) $y'' + y = \cos(x) + \sin(2x)$.

(5) $2y'' - y' - 3y = 29e^{-x}\cos(x)$.

(6) $y'' - 5y' + 6y = xe^{4x}$.

Exercice 12. Un skieur descend une piste en ligne droite. On note $x(t)$ sa position sur la piste en fonction du temps. On suppose que le skieur est soumis à la force de gravité, à une force de frottement des skis sur la neige proportionelle à la vitesse et à une force de résistance de l'air proportionelle au carré de la vitesse.

1. Justifier en quelques mots que la fonction $x(t)$ satisfait une équation différentielle de la forme suivante:

$$x'' = a - bx' - c(x')^2$$

où a, b et c sont des nombres réels positifs.

2. On suppose maintenant que $a = 6$, $b = c = 1$. On note $v = x'(t)$ la vitesse du skieur. Donner l'équation différentielle satisfaite par v. Quel type d'équation différentielle est-ce ?

3. Trouver les solutions de l'équation en v qui soient positives pour t positif.

4. Quelle est la limite de la vitesse du skieur quand t tend vers $+\infty$.

Exercice 13. Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{t-1}{t^2}e^{-t}.$$

Exercice 14. Soit l'équation différentielle

$$x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = -1.$$

(1) Vérifier que la fonction $x \mapsto 1/x^2$ en est une solution particulière.
(2) En posant $y = z/x^2$, résoudre l'équation.

Exercice 15. Déterminer l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables, telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on ait $f'(x) = f(1-x)$.