Université Sorbonne Paris Nord, Institut Galilée
Cycle Préparatoire Ingénieur Intégré, $1^{\text{ère}}$ année
Année universitaire 2023-2024, second semestre

Mathématiques
Fiche d'exercices n°7 : Géométrie

Exercice 1. Soit (i, j, k) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $v_1 = i + 2j - \sqrt{7}k$, $v_2 = 3i + 2j + \sqrt{7}k$, $v_3 = 2i + 3j + 4k$ et $v_4 = \sqrt{2}i + \frac{3\sqrt{2}}{2}j + 2\sqrt{2}k$. Calculer $\langle v_1, v_2\rangle$, $\langle v_3, v_4\rangle$ et $\|v_3\|$, $\|v_4\|$.

Exercice 2. On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$. On pose

$$\varphi : (P, Q) \mapsto P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0)$$

1. Montrer que φ définit un produit scalaire sur E.
2. Trouver une base orthonormale (P_i), $i = 0, 1, 2$ avec $\deg P_i = i$.

Exercice 3. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice.

1. Démontrer que pour tous $u, v \in \mathbb{R}^n$, on a $\langle u, Av\rangle = \langle {}^tAu, v\rangle$.
2. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ de matrice A dans la base canonique. On suppose que A est orthogonale. Montrer qu'alors $\langle f(u), f(v)\rangle - \langle u, v\rangle = 0$. Que peut-on en conclure ?
3. La réciproque de la propriété précédente est-elle vraie?

Exercice 4. On considère le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormal O, i, j. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x\sqrt{3} + y + 3 - \sqrt{3} \\ \frac{1}{2}(-x + y\sqrt{3} - 1 + \sqrt{3}) \end{pmatrix}$$

1. Montrer que f n'est pas linéaire, mais qu'on peut l'écrire comme la composée d'une translation T et d'une application linéaire R dont on donnera l'expression.
2. Montrer que R est une rotation dont on précisera l'angle.
3. Montrer que R préserve le produit scalaire, c'est à dire que pour tous $u, v \in \mathbb{R}^2$, on a $\langle R(u), R(v)\rangle = \langle u, v\rangle$.
4. En déduire que si M', N' sont les images par f de M, N respectivement, alors $\|\overrightarrow{M'N'}\| = \|\overrightarrow{MN}\|$. On dit que f est une *isométrie*.
5. Établir qu'il existe un et un seul point de $\mathbb{R}^2$ invariant par f.

Exercice 5. Montrer que $\det(a \wedge b, a \wedge c, a \wedge d) = 0$.

Exercice 6. Dans l'espace, on considère un vecteur $u \neq 0$, un point A et $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer les points M tels que $\langle \overrightarrow{AM}, u \rangle = \lambda$.

Exercice 7. Soient A, B des points et u, v des vecteurs distincts. Déterminer les points M tels que $\langle \overrightarrow{AM}, u \rangle = \langle \overrightarrow{BM}, v \rangle$.

Exercice 8. Soient A, B, C trois points du plan. Établir $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.

Exercice 9. Soient A, B deux points et $u \neq 0$ dans le plan. Déterminer les points M tels que :

1. $\langle u, \overrightarrow{AM} \rangle + \langle u, \overrightarrow{BM} \rangle = 0$.
2. $\det(u, \overrightarrow{AM}) + \det(u, \overrightarrow{BM}) = 0$.

Exercice 10. Soit (O, i, j) un repère du plan. On considère le point $\Omega = (2, -2)$ et les vecteurs $I = 2i - j$ et $J = i + 3j$. Calculer les coordonnées (x, y) d'un point M dans le repère (O, i, j) en fonction de ses coordonnées dans le repère (Ω, I, J).

Exercice 11. On note $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1. Donner l'équation polaire du cercle $\mathcal{C}$ et celle de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point $A \in \mathcal{C}$ défini par $(i, \overrightarrow{OA}) = \alpha \mod 2\pi$.

Exercice 12. On considère les points $A = (1, 1)$, $B = (-1, -3)$ et $C = (2, -3)$.

1. Donner l'équation de la droite (AB).
2. Donner l'équation de la droite passant par C et de vecteur directeur $u = 2i - j$.

Exercice 13. On considère les points $A = (2, 1)$, $B = (-1, 2)$ et $M = (3, 4)$.

1. Calculer la distance de M à la droite D passant par A et B.
2. Donner l'équation de la perpendiculaire à D pasant par M.

Exercice 14. Soit (O, i, j, k) une base orthonormée de l'espace. On considère les vecteurs $u = (\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$, $v = (\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})$ et $w = (0, 1, 0)$.

1. Vérifier que (O, u, v, w) est une base orthogonale et en déduire une base orthonormée (O, I, J, K) dont les vecteurs sont colinéaires à u, v, w.
2. Soient
$$t = xi + yj + zk = XI + YJ + ZK$$
et $f(t) = x^2 + 3y^2 + z^2 - 2zx$. Calculer $f(t)$ en fonction de X, Y, Z.

Exercice 15. Soit D la droite passant par le point $A = (0, 2, -1)$ et de vecteur directeur $u = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -1, 1)$.

1. Quelle est l'équation cartésienne de D ?

2. Quelle est la distance de $M = (0, 0, 1/2)$ à la droite D ?

Exercice 16. Déterminer l'équation cartésienne du plan P passant par $A = (1, 2, 0)$ et parallèle aux vecteurs $u = (1, 2, 3)$ et $v = (0, -1, 2)$.

Exercice 17. Soit (O, i, j) un repère du plan. On considère un nouveau repère (Ω, I, J) défini par $\overrightarrow{O\Omega} = -2j$, $I = i + j$, $J = j$.

1. Exprimer les anciennes coordonnées d'un point M du plan en fonction des nouvelles.
2. En déduire que la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = x - 2 + \frac{1}{x}$ admet Ω comme centre de symétrie.

Exercice 18. On considère les droites D et D' de l'espace définies par

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad \text{respectivement.}$$

Déterminer la perpendiculaire commune à D et D'.

Exercice 19. Montrer que tout hyperplan $H \subset \mathbb{R}^n$ admet un unique supplémentaire orthogonal.

Exercice 20. Soient $V^1, \ldots, V^n$ des vecteurs libres dans $\mathbb{R}^n$, et $H_n = \mathrm{Vect}(V^1, \ldots, V^{n-1})$. On définit par récurrence le volume du parallélépipède construit sur $V^1, \ldots, V^n$ par

$$\mathrm{vol}_n(V^1, \ldots, V^n) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{vol}_{n-1}(V^1, \ldots, V^{n-1}) \times \|(I - p)(V^n)\|, \quad \mathrm{vol}_1(V^1) \stackrel{\text{def}}{=} \|V^1\|, \tag{1}$$

où p est la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(V^1, \ldots, V^{n-1})$, c'est à dire, la projection sur H_n parllèlement au supplémentaire orthogonal de celui-ci (voir l'exercice précédent).

1. Vérifier pour $n = 2$ que cette définition correspond bien à la définition que vous connaissez du volume d'un parallélépipède.
2. Montrer par récurrence que
$$\mathrm{vol}_n(V^1, \ldots, V^n) = |\det(V^1, \ldots, V^n)|.$$
3. La définition du volume dépend-elle du choix de partitionner les vecteurs en $\{V^1, \ldots V^{n-1}\} \cup V^n$?