Topologie algébrique

École Normale Supérieure 2018-2019

Geoffroy Horel

CHAPITRE 1

Théorie des catégories

1. Généralités

DÉFINITION 1.1. Une catégorie C est la donnée suivante.

- Un ensemble noté $\mathrm{Ob}(C)$ dont les éléments sont appelés les objets de C.
- Un ensemble $\mathrm{Hom}_C(x, y)$ pour toute paire (x, y) d'objets de C dont les éléments sont appelés les morphismes de x vers y.
- Un élément id_x dans $\mathrm{Hom}_C(x, x)$ pour tout objet x de C appelé l'identité de x.
- Des applications de compositions

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_C(y, z) \times \mathrm{Hom}_C(x, y) &\to \mathrm{Hom}_C(x, z) \\ (f, g) &\mapsto f \circ g \end{aligned}$$

  pour tout triplet (x, y, z) d'objets de C.

Ces données doivent par ailleurs satisfaire les axiomes suivants.

- Pour toute paire d'objets (x, y) et tout élément f de $\mathrm{Hom}_C(x, y)$, on a

$$f \circ \mathrm{id}_x = f \text{ et } \mathrm{id}_y \circ f = f.$$

- Pour tout quadruplet (x, y, z, t) d'objets de C, et pour tout élément (f, g, h) de $\mathrm{Hom}_C(z, t) \times \mathrm{Hom}_C(y, z) \times \mathrm{Hom}_C(x, y)$, on a l'égalité

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

NOTATION 1.2. On utilisera souvent des flèches pour symboliser les morphismes d'une catégorie. Ainsi la phrase “soit $f : x \to y$” est totalement équivalente à “soit f un élément de $\mathrm{Hom}_C(x, y)$”. Il faut d'ailleurs noter que dans de nombreux textes le mot “flèche” est utilisé à la place du mot “morphisme”.

REMARQUE 1.3. Cette remarque est un point un peu technique qui peut être ignoré sans nuire à la compréhension de la théorie. Il se trouve que de nombreux objets que l'on souhaiterait appeller catégories ne rentrent pas tout à fait dans le cadre de cette définition car leurs objets ne forment pas un ensemble. Il est par exemple bien connu qu'il ne peut pas exister d'ensemble des ensembles (paradoxe du barbier), cependant, on souhaiterait pouvoir parler de la catégorie des ensembles dont les objets sont les ensembles et les morphismes sont les applications entre ensembles. Ce problème peut être résolu en utilisant la théorie des univers de Grothendieck. En bref, on suppose qu'on dispose de deux modèles pour la théorie des ensembles, l'un dont les éléments sont appellés les petits ensemble et l'autre, contenant le premier, dont les éléments sont appellés les grands ensembles. On suppose aussi qu'il existe un grand ensemble des petits ensembles. On peut alors parler de la catégorie des ensembles. Ses objet forment un grand ensemble et ses morphismes sont des petits ensembles. Cet exemple nous incite à poser la définition suivante.

DÉFINITION 1.4. Une catégorie est dite localement petite si pour toute paire d'objets (x, y), l'ensemble des morphismes $\mathrm{Hom}_C(x, y)$ est un petit ensemble. Elle est dite petite si elle est localement petite et si son ensemble d'objets est petit.

Remarque 1.5. Dans ce cours, sauf mention du contraire, une catégorie est par défaut localement petite. De même un ensemble est par défaut petit.

Exemple 1.6. Nous donnons quelques exemples de catégories.

- La catégorie vide notée $\varnothing$ est l'unique catégorie dont l'ensemble des objets est vide.
- À un ensemble partiellement ordonné $(E, \leq)$, on peut associer une catégorie notée E dont l'ensemble des objets est E et dont l'ensemble des morphismes est donné par la formule suivante

$$\mathrm{Hom}_E(x, y) = * \text{ si } x \leq y$$
$$\mathrm{Hom}_E(x, y) = \varnothing \text{ sinon.}$$

  On se convaincra facilement qu'il existe un unique choix pour la composition.
- Étant donné un groupe G ou plus généralement un monoïde, on dispose d'une catégorie $\mathcal{B}G$ avec un unique objet $*$ et avec $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}G}(*, *) = G$. La composition est donnée par la multiplication du groupe. La donnée d'une catégorie avec un unique objet est exactement équivalente à la donnée d'un monoïde.
- Pour n un entier naturel, on note $[n]$ l'ensemble totalement ordonné $\{0, 1, \ldots, n\}$. On note Δ la catégorie dont les objets sont les entiers naturels et telle que $\mathrm{Hom}_\Delta([n], [m])$ est l'ensemble des applications croissantes de $[n]$ dans $[m]$.
- On a déjà parle de la catégorie **Ens** dont les objets sont les (petits) ensembles et les morphismes sont les applications entre ensembles.
- La catégorie **Grp** est la catégorie dont les objets sont les groupes et dont les morphismes sont les morphismes de groupes.
- On peut de même définir la catégorie **Ab** des groupes abéliens, $\mathbf{Mod}_k$ des modules sur un anneau k, **Ann** des anneaux, etc.
- La catégorie **Top** est la catégorie dont les objets sont les espaces topologiques et les morphismes sont les applications continues.
- La catégorie **Diff** dont les objets sont les variétés lisses et les morphismes sont les applications C^∞.

Définition 1.7. Soit C, une catégorie. Sa catégorie opposée notée C^{op} a les mêmes objets que C mais les morphismes sont donnés par l'équation

$$\mathrm{Hom}_C(x, y) = \mathrm{Hom}_{C^{\mathrm{op}}}(y, x).$$

Si $g \in \mathrm{Hom}_C(x, y)$ et $f \in \mathrm{Hom}_C(y, z)$, on définit $g \circ f$ dans C^{op} comme la composée $g \circ f \in \mathrm{Hom}_C(x, z) = \mathrm{Hom}_{C^{\mathrm{op}}}(z, x)$.

Définition 1.8. Soient C et D deux catégories. La catégorie produit $C \times D$ est la catégorie dont l'ensemble des objets est $\mathrm{Ob}(C) \times \mathrm{Ob}(D)$ et dont les ensembles de morphismes sont donnés par la formule

$$\mathrm{Hom}_{C\times D}((x, y), (x', y')) = \mathrm{Hom}_C(x, x') \times \mathrm{Hom}_D(y, y')$$

Définition 1.9. Soit C une catégorie, x, y, z et t quatre objets de C et $f : x \to y$, $g : y \to t$, $h : x \to z$, $i : z \to t$ quatre morphismes. On dit que le carré

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & y \arrow[d, "g"] \\ z \arrow[r, "i"'] & t \end{tikzcd}$$

est commutatif si on a l'égalité $g \circ f = i \circ h$.

Remarque 1.10. On peut également parler de triangle commutatif, de pentagone commutatif, etc. Cette notion est simplement une façon visuelle de représenter une équation.

2. Foncteurs

Les catégories sont elle-mêmes des structures algébriques et il existe donc une notion de morphismes entre catégories.

Définition 1.11. Soit C et D deux catégories, un foncteur entre C et D est la donné d'une application $F : \mathrm{Ob}(C) \to \mathrm{Ob}(D)$ et d'applications également notées F de $\mathrm{Hom}_C(x, y)$ vers $\mathrm{Hom}_D(F(x), F(y))$ pour toute paire (x, y) d'objets de C. Cette donnée devant vérifier les axiomes suivants

- On a $F(\mathrm{id}_x) = \mathrm{id}_{F(x)}$ pour tout objet x de C.
- On a l'équation $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ pour toute paires (f, g) de morphismes de C dont la composition est bien définie.

Définition 1.12. Soient C, D et E des catégories et $F : C \to D$ et $G : D \to E$ des foncteurs. Alors, on peut définir un foncteur $G \circ F$ par les formules $G \circ F(x) = G(F(x))$ pour x un objet de C et $G \circ F(f) = G(F(f))$ pour f un morphisme de C.

On dispose aussi d'un foncteur identité $\mathrm{id}_C : C \to C$ pour toute catégorie. Il est donc possible de définir la catégorie **Cat** des petites catégories.

Exemple 1.13. Nous donnons quelques exemples de foncteurs.

- Un foncteur $F : \mathcal{B}G \to \mathbf{Set}$ est la donnée d'un ensemble muni d'une action du groupe G. En effet, si on note X l'ensemble $F(*)$ (où $*$ est l'unique objet de $\mathcal{B}G$), on constate que F induit un morphisme de monoïde
$$G \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ens}}(X, X)$$
qui est exactement équivalent à la donnée d'une action de G sur X.
- De même un foncteur $\mathcal{B}G \to \mathbf{Ab}$ est la donnée d'un groupe abélien muni d'une action additive de G, un foncteur de $\mathcal{B}G$ vers $\mathbf{Mod}_k$ est une k-représentation de G, etc.
- Soit $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels munis de la relation d'ordre $\leq$. Un foncteur $\mathbb{N} \to \mathbf{Ens}$ est la donnée d'une collection d'ensembles X_n indexée par les entiers naturels et d'applications $f_n : X_n \to X_{n+1}$.
- On dispose d'un foncteur $U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Ens}$ qui envoie un groupe sur son ensemble sous-jacent. On appelle souvent U le “foncteur oubli”. On peut définir des foncteurs similaires $\mathbf{Mod}_k \to \mathbf{Ens}$, $\mathbf{Ann} \to \mathbf{Ens}$.
- On dispose d'un foncteur $CC : \mathbf{Top} \to \mathbf{Ens}$ qui envoie un espace topologique X sur l'ensemble des ses composantes connexes.
- Étant donnée une catégorie C, on dispose d'un foncteur $C^{\mathrm{op}} \times C \to \mathbf{Ens}$ qui envoie une paire (x, y) d'objets de C sur $\mathrm{Hom}_C(x, y)$.

Exemple 1.14. Un foncteur $\Delta^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ens}$ est appellé un ensemble simplicial. En raison de l'importance des ces objets en théorie de l'homotopie, nous allons essayer d'en donner une description plus explicite. La donnée d'un foncteur $X : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ens}$ est en particulier la donnée d'une famille d'ensemble $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ indexée par les entiers naturels. Il y a ensuite des applications $X_n \to X_m$ pour chaque applications croissante $[m] \to [n]$. On va donner des noms particuliers à certaines de ces applications. Pour tout $i \in \{0, \ldots, n+1\}$, il existe une unique application injective croissante de $[n]$ vers $[n+1]$ dont l'image ne contient pas i. On appelle i-ème face de X et on note $d_i : X_{n+1} \to X_n$ l'application induite par la structure d'ensemble simplicial. De même étant donné $j \in \{0, \ldots, n\}$, il existe une unique application surjective croissante $[n+1] \to [n]$ qui envoie j et $j+1$ sur le même élément. On appelle j-ème dégénérescence de X et on note $s_j : X_n \to X_{n+1}$ l'application induite par la structure d'ensemble simplicial. Il n'est pas difficile de montrer que tout application croissante $[n] \to [p]$ peut s'écrire comme une composition des applications des deux types précédents. La structure d'ensemble simplicial est donc déterminée par les ensembles X_n et les applications de faces et de dégénérescences entre eux. Cependant la structure de la catégorie Δ impose certaines relations entre ces applications. Il n'est pas difficile de se convaincre que les relations suivantes doivent être satisfaites.

$$
\begin{aligned}
d_i \circ d_j &= d_{j-1} \circ d_i \text{ si } i < j, \\
s_i \circ s_j &= s_j \circ s_{i-1} \text{ si } i > j, \\
d_i \circ s_j &= s_{j-1} \circ d_i \text{ si } i < j, \\
d_i \circ s_j &= \mathrm{id} \text{ si } i = j \text{ ou } i = j+1, \\
d_i \circ s_j &= s_j \circ d_{i-1} \text{ si } i > j+1.
\end{aligned}
$$

Ce qui est plus difficile est de montrer que ces identités suffisent, de sorte qu'on peut définir un ensemble simplicial comme une collection $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ munie d'application de faces et de dégénérescences satisfaisant les identités ci-dessus. Ce résultat ne sera cependant pas utilisé dans ce cours.

On peut de même définir un groupe simplicial, un groupe abélien simplicial, un k-module simplicial, etc. comme un foncteur de Δ^{op} vers **Grp**, **Ab**, $\mathbf{Mod}_k$, etc. Dans chaque cas, il s'agit d'une suite d'objets $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans la catégorie considérée, muni de morphismes de faces et de dégénérescences satisfaisant les identités ci-dessus.

EXEMPLE 1.15. Il existe un foncteur "groupe libre" $G : \mathbf{Ens} \to \mathbf{Grp}$. Pour S un ensemble, on appelle mot simplifié de S un mot fini w dans l'alphabet $\{s, s \in S\} \sqcup \{s^{-1}, s \in S\}$ tel que pour tout s dans S, les mots ss^{-1} et $s^{-1}s$ ne soient pas des sous mots de w. On note $G(S)$ l'ensemble des mots simplifiés de S. Il existe une structure de groupe sur $G(S)$ dont l'élément neutre est le mot vide et le produit est donné par la concaténation des mots avec la règle que si un sous-mot de la forme ss^{-1} ou $s^{-1}s$ apparaît, on peut le supprimer. On a une injection ensembliste évidente $S \to G(S)$ et on peut vérifier que pour tout ensemble S et tout groupe H, un morphisme de groupe $G(S) \to H$ est complètement déterminé par sa restriction à $S \subset G(S)$. Il n'y a par ailleurs aucune condition sur ce que peut être cette restriction de sorte que l'application de restriction

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}(G(S), H) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ens}}(S, H)$$

est une bijection.

EXEMPLE 1.16. De manière analogue, on peut construire un foncteur "groupe abélien libre" $\mathbf{Ens} \to \mathbf{Ab}$. Pour S, un ensemble, on note $\mathbb{Z}\langle S\rangle$ la valeur de ce foncteur. En tant qu'ensemble, il est l'ensemble des sommes formelles $\sum_{s\in S} a_s.s$ où les coefficients a_s sont des entiers presque tous nuls. Il existe une structure de groupe abélien évidente sur $\mathbb{Z}\langle S\rangle$. Par ailleurs l'injection $S \to \mathbb{Z}\langle S\rangle$ envoyant s sur $1.s$ induit une application de restriction

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(\mathbb{Z}\langle S\rangle, M) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ens}}(S, M)$$

qui est une bijection.

On peut aussi construire exactement de la même façon un foncteur R-module libre pour R un anneau commutatif. Il suffit de demander à ce que les coefficients a_s de la construction précédente soient des éléments de R au lien d'être des nombres entiers. On notera $R\langle S\rangle$ ce foncteur.

DÉFINITION 1.17. Soient C et D deux catégories. Un foncteur $F : C \to D$ est dit pleinement fidèle si pour toute paire (x, y) d'objets de C, le foncteur F induit une bijection

$$\mathrm{Hom}_C(x, y) \to \mathrm{Hom}_D(F(x), F(y)).$$

DÉFINITION 1.18. Un morphisme $f : x \to y$ dans une catégorie C est un isomorphisme s'il existe un morphisme $g : y \to x$ tel que $f \circ g = \mathrm{id}_y$ et $g \circ f = \mathrm{id}_x$. On dit dans ce cas que g est l'inverse de f. Deux objets x et y sont dits isomorphes s'il existe un isomorphisme entre eux.

REMARQUE 1.19. Un argument standard d'algèbre montre que l'inverse d'un morphisme est unique lorsqu'il existe.

Remarque 1.20. Dans certaines catégories les isomorphismes portent un nom spécial, par exemple dans **Ens**, on les appelle bijections, dans **Top** on les appelle homéomorphismes dans **Diff** on les appelle difféomorphismes.

Proposition 1.21. *Soient $F : C \to D$ un foncteur entre deux catégories. Si f est un isomorphisme de C, alors $F(f)$ est un isomorphisme de D. De même si deux objets x et y de C sont isomorphes, $F(x)$ et $F(y)$ sont isomorphes.*

Preuve. La seconde affirmation découle de la première. Soit $f : x \to y$ un morphisme. Par définition, il existe g tel que $f \circ g = \mathrm{id}_y$ et $g \circ f = \mathrm{id}_x$. Les axiomes satisfaits par le foncteur F impliquent immédiatement que $F(g)$ est l'inverse de $F(f)$. □

Par la proposition précédente, disposer d'un foncteur d'une catégorie "compliquée" vers une catégorie plus simple est souvent un moyen efficace de prouver que deux objets ne sont pas isomorphes, en effet, il suffit de vérifier que leurs images par le foncteur ne sont pas isomorphes.

Exemple 1.22. Deux espaces topologiques qui n'ont pas le même nombre de composante connexes ne peuvent pas être homéomorphes. Deux groupes ne peuvent pas être isomorphes s'il n'existe pas de bijections entre leurs ensembles sous-jacents, etc.

La réciproque de la proposition ci-dessus n'est pas vraie en général. On retiendra néammois la proposition suivante.

Proposition 1.23. *Soit $F : C \to D$ un foncteur pleinement fidèle. Soit $f : x \to y$ un morphisme de C. Alors f est un isomorphisme si et seulement si $F(f)$ est un isomorphisme.*

Preuve. Soit $f : x \to y$ un morphisme tel que $F(f)$ est un isomorphisme. Il existe donc $h : F(y) \to F(x)$ tel que $F(f) \circ h = \mathrm{id}_{F(y)}$ et $h \circ F(f) = \mathrm{id}_{F(x)}$. Puisque F est pleinement fidèle, on peut trouver $g : y \to x$ tel que $F(g) = h$. Par définition d'un foncteur, on a alors $F(f \circ g) = \mathrm{id}_{F(y)}$ et $F(g \circ f) = \mathrm{id}_{F(x)}$. Une fois encore, la propriété de pleine fidélité de F implique que $f \circ g = \mathrm{id}_y$ et $g \circ f = \mathrm{id}_x$. □

3. Transformations naturelles

Définition 1.24. Soient C et D deux catégories et F et G deux foncteurs de C vers D. Une tranformation naturelle de F vers G est la donnée d'un morphisme $T(x) : F(x) \to G(x)$ pour tout objet x de C tel que pour tout morphisme $f : x \to y$ dans C, le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} F(x) \arrow[r, "T(x)"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(x) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(y) \arrow[r, "T(y)"'] & G(y) \end{tikzcd}$$

Exemple 1.25. Donnons quelques exemples de transformations naturelles. On invite le lecteur à utiliser ses connaissances mathématiques pour produire d'autres exemples.

- Pour F n'importe quel foncteur de C vers D, on dispose de la transformation naturelle identité de F notée id_F donnée par $\mathrm{id}_F(x) = \mathrm{id}_{F(x)}$.
- Pour tout groupe abélien A, il existe un unique morphisme $0 \to A$ (resp. $A \to 0$). On vérifie aisément que ces morphismes définissent des transformations naturelles du foncteur constant de valeur 0 vers le foncteur identité de la catégorie des groupes abéliens (resp. du foncteur identité vers le foncteur constant).
- Reprenons le foncteur groupe libre construit plus haut. On a dit que pour tout ensemble S, il existe une application ensembliste évidente $S \to G(S)$. On peut interpréter cette application comme une transformation naturelle $\mathrm{id}_{\mathbf{Ens}} \to U \circ G$ où $\mathrm{id}_{\mathbf{Ens}}$ désigne le foncteur identité de

la catégorie des ensembles et $U \circ G$ est la composée des foncteurs U et G (on rappelle que U désigne le foncteur oubli de la catégorie des groupes vers celle des ensembles).

- Soit V un espace vectoriel sur un corps k. Il est classique qu'on dispose d'une inclusion
$$V \to (V^*)^*$$
de V vers son bidual qui envoie v sur $\phi \mapsto \phi(v)$. On vérifie que celà définit une transformation naturelle du foncteur identité de la catégorie $\mathbf{Vect}_k$ vers le foncteur $V \mapsto (V^*)^*$.
- Soit U : **Ann** $\to$ **Ens** le foncteur qui envoie un anneau sur son ensemble sous-jacent. Soit V : **Ann** $\to$ **Ens** le foncteur qui envoie un anneau sur l'ensemble des ses éléments inversibles. On a toujours une inclusion $A^\times \to A$ qui définit une transformation naturelle $V \to U$.
- Soit X un espace topologique. On note $CC(X)$ l'ensemble des composantes connexes de X, on dispose d'une application continue $X \to CC(X)$ (où $CC(X)$ est muni de la topologie quotient ; prendre garde au fait que ce n'est pas toujours la topologie discrète) qui envoie chaque point de X sur la composante connexe dans lequel il vit. On vérifie que celà définit une transformation naturelle du foncteur identité de **Top** vers le foncteur $X \mapsto CC(X)$.
- etc.

Remarque 1.26. Nous espérons que ces exemples mettent en évidence l'intuition derrière la notion de transformation naturelle. Si on dispose de foncteurs F et G de C vers D, une transformation naturelle est un morphisme $F(x) \to G(x)$ pour tout objet x de C qui peut se définir de façon uniforme pour tous les objets (c'est à dire sans faire de choix).

Étant donnés trois foncteurs F, G et H de C vers D et des transformations naturelles T de F vers G et U de G vers H, on peut construire une transformation $U \circ T$ par la formule $U \circ T(x) = U(x) \circ T(x)$. On a par ailleurs la transformation naturelle identité pour tout foncteur F. On laisse au lecteur le soin de vérifier que l'on peut ainsi construire une catégorie dont l'ensemble des objets est l'ensemble des foncteurs de C à D et dont les morphismes sont les transformations naturelles. On note cette catégorie $\mathbf{Fon}(C, D)$.

Remarque 1.27. Les transformations naturelles sont des morphismes entre foncteurs, de même que les foncteurs sont des morphismes entre catégories. En langage savant celà se traduit par le fait qu'il existe une 2-catégorie des catégories. Sans entrer dans les détails, une 2-catégorie est une structure qui ressemble à une catégorie à part que les morphismes entre deux objets sont eux-même les objets d'une catégorie.

4. Préfaisceaux et lemme de Yoneda

Définition 1.28. Soit C une petite catégorie. La catégorie des préfaisceaux sur C est la catégorie $\hat{C}$ dont les objets sont les foncteurs $C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ens}$ et dont les morphismes sont les transformation naturelles.

Remarque 1.29. On se restreint à C une petite catégorie pour s'assurer que la catégorie $\hat{C}$ est localement petite.

Définition 1.30. Soit C une petite catégorie et x un objet de C. On note h_x le préfaisceau qui envoie un objet y sur l'ensemble $\mathrm{Hom}_C(y, x)$ et un morphisme $f : u \to v$ sur l'application
$$\mathrm{Hom}_C(v, x) \to \mathrm{Hom}_C(u, x)$$
$$g \mapsto g \circ f$$
On appelle h_x le préfaisceau représenté par x.

On vérifie facilement qu'il existe un foncteur $C \to \hat{C}$ qui envoie x sur h_x et $f : x \to y$ sur la transformation naturelle
$$\mathrm{Hom}(-, x) \to \mathrm{Hom}(-, y)$$
donnée par la postcomposition par f.

Avant de pouvoir énoncer le lemme de Yoneda, nous avons besoin de fixer une notation. Soit C une petite catégorie, x un objet de C et F un objet de $\hat{C}$, alors on peut construire une application

$$Y_x : \mathrm{Hom}_{\hat{C}}(h_x, F) \to F(x)$$

qui envoie $k : h_x \to F$ une transformation naturelle sur $k(x)(\mathrm{id}_x)$. Le lemme de Yoneda est l'énoncé suivant.

LEMME 1.31. *L'application Y_x est une bijection.*

PREUVE. On construit une application Z_x qui va dans l'autre sens. Soit $a \in F(x)$. On définit alors $Z_x(a) : h_x \to F$ une transformation naturelle par la formule

$$\begin{aligned} Z_x(a)(u) : \mathrm{Hom}_C(u, x) &\to F(u) \\ f &\mapsto F(f)(a) \end{aligned}$$

Il n'est pas difficile de vérifier que $Z_x(a)$ est bien une transformation naturelle. Il faut alors vérifier que $Z_x \circ Y_x$ et $Y_x \circ Z_x$ sont les application identité de $\mathrm{Hom}_{\hat{C}}(h_x, F)$ et $F(x)$ respectivement. □

COROLLAIRE 1.32. *Le foncteur $C \to \hat{C}$ qui envoie x sur h_x est pleinement fidèle.*

PREUVE. Il faut montrer que pour toute paire d'objets x et y de C. l'application

$$\mathrm{Hom}_C(x, y) \to \mathrm{Hom}_C(h_x, h_y)$$

est une bijection. C'est exactement le lemme de Yoneda avec $F = h_y$. □

COROLLAIRE 1.33. *Si deux objets x et x' sont tels que h_x et h'_x sont isomorphes comme préfaisceaux alors, x et x' sont isomorphes dans C.*

PREUVE. Il suffit d'appliquer la Proposition 1.23. □

On appelle ce foncteur de C dans $\hat{C}$ le plongement de Yoneda.

REMARQUE 1.34. Ce corollaire contient en lui les résultat d'unicité d'objets construit par propriété universelle. Donnons un exemple, soient M et N deux groupes abéliens et soit $B_{M,N}$ le foncteur $\mathbf{Ab} \to \mathbf{Set}$ qui envoie P sur l'ensemble des applications bilinéaires de $M \times N$ vers P. Ce foncteur peut se voir comme un préfaisceau sur $\mathbf{Ab}^{\mathrm{op}}$. L'existence du produit tensoriel est équivalente à l'affirmation que ce préfaisceau est isomorphes à $h_{M \otimes N}$. Le corollaire précédent affirme alors que le produit tensoriel est unique à isomorphisme près.

Dans le même ordre d'idée, on peut montrer purement catégoriquement l'isomorphisme $M \otimes N \cong N \otimes M$ sans utiliser de modèle explicite pour le produit tensoriel. Il suffit de construire un isomorphisme naturel entre les foncteurs $B_{M,N}$ et $B_{N,M}$. Soit P un groupe abélien, on dispose d'une bijection évidente

$$B_{M,N}(P) \cong B_{N,N}(P)$$

qui envoie une application bilinéaire $(m, n) \mapsto \phi(m, n)$ sur l'application bilinéaire $(n, m) \mapsto \phi(m, n)$. On vérifie facilement que celà est bien un isomorphisme naturel.

On construirait de même l'isomorphisme d'associativité

$$(M \otimes N) \otimes P \cong M \otimes (N \otimes P)$$

5. Adjonctions

DÉFINITION 1.35. Soient C et D deux catégories. Une adjonction est un triplet (F, G, i) où $F : C \to D$ est un foncteur $G : D \to C$ est un foncteur et i est un isomorphisme de foncteurs $C^{\mathrm{op}} \times D \to \mathbf{Ens}$

$$i : \mathrm{Hom}_D(F(-), -) \cong \mathrm{Hom}_C(-, G(-))$$

On appelle alors F l'adjoint à gauche et G l'adjoint à droite.

REMARQUE 1.36. On dit souvent, que le foncteur G est l'adjoint à droite de F et que le foncteur F est l'adjoint à gauche de G. En effet comme on le verra dans la Proposition 1.38, un adjoint à gauche ou à droite d'un foncteur est uniquement déterminé à isomorphisme près.

Étant donné une adjonction (F, G, i) entre les catégories C et D, on dispose pour tous les objets c de C d'un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_D(F(c), F(c)) \cong \mathrm{Hom}_C(c, G(F(c)))$$

et donc en particulier d'un morphisme $c \to G(F(c))$ qui correspond à l'identité de $F(c)$ par la bijection ci-dessus. On le nomme l'unité de l'adjonction en c. Dualement, pour d un objet de D, on a une bijection

$$\mathrm{Hom}_D(F(G(d)), d) \cong \mathrm{Hom}(G(d), G(d))$$

qui nous fournit un morphisme $FG(d) \to d$. On appelle ce morphisme counité de l'adjonction en d.

EXEMPLE 1.37. Voici quelques exemples d'adjonctions.

- On a déjà vu le foncteur groupe libre $G : \mathbf{Ens} \to \mathbf{Grp}$ et le foncteur oubli $U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Ens}$. Comme on l'a observé, il existe une bijection

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}(G(S), H) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ens}}(S, H)$$

  On peut vérifier que cette bijection est en fait une transformation naturelle de sorte que le foncteur G est l'adjoint à gauche de U.
- De même le foncteur groupe abélien libre $\mathbb{Z}\langle - \rangle : \mathbf{Ens} \to \mathbf{Ab}$ est l'adjoint à gauche du foncteur oubli $U : \mathbf{Ab} \to \mathbf{Ens}$.
- Fixons un anneau commutatif k et M un k-module. On dispose d'un foncteur

$$\begin{aligned} F : \mathbf{Mod}_k &\to \mathbf{Mod}_k \\ N &\mapsto N \otimes_k M \end{aligned}$$

  et d'un foncteur

$$\begin{aligned} G : \mathbf{Mod}_k &\to \mathbf{Mod}_k \\ N &\mapsto \mathrm{Hom}_k(M, N) \end{aligned}$$

  où $\mathrm{Hom}_k(M, N)$ désigne l'ensemble des morphismes k-linéaires de M vers N muni de sa structure évidente de k-module. On peut construire une adjonction dont l'adjoint à gauche est F et l'adjoint à droite est G. Il s'agit donc de construire un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}_k}(N \otimes_k M, P) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}_k}(N, \mathrm{Hom}_k(M, P))$$

  Par la propriété universelle du produit tensoriel, un morphisme $N \otimes_k M \to P$ est la donnée d'une application bilinéaire $\phi : N \times M \to P$. À partir de ϕ, on peut construire un morphisme $N \to \mathrm{Hom}_k(M, P)$ qui envoie n sur $\phi(n, -)$. Inversement, étant donné un morphisme $g : N \to \mathrm{Hom}_k(M, P)$, on peut construire une application bilinéaire $\phi : N \otimes_k M \to P$ par la formule $\phi(n, m) = g(n)(m)$. On vérifie facilement que ces deux applications fournissent un isomorphisme naturel.
- Le foncteur $\mathbf{Top} \to \mathbf{Ens}$ qui envoie un espace topologique sur son ensemble sous-jacent possède un adjoint à droite et un adjoint à gauche. L'adjoint à gauche est le foncteur qui muni un ensemble de sa topologie discrète et l'adjoint à droite et le foncteur qui muni un ensemble de sa topologie grossière.

La proposition suivante affirme que si un foncteur admet un adjoint à droite, ce dernier est unique à isomorphisme près.

PROPOSITION 1.38. *Soit $F : C \to D$ un foncteur. S'il existe deux adjonctions (F, G, i) et (F, G', i'), alors les foncteurs G et G' sont naturellement isomorphes.*

PREUVE. Construisons un isomorphisme j de G à G'. Pour d un objet de D, on dispose d'un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_C(-, G(d)) \cong \mathrm{Hom}_C(-, G'(d))$$

induit par les les isomorphismes i et i'. Par le lemme de Yoneda, cela nous fournit un unique isomorphisme $j(d) : G(d) \to G'(d)$. Soit maintenant $f : d \to d'$ un morphisme. Considérons le diagramme commutatif suivant dans la catégorie des préfaisceaux sur C

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_C(-, G(d)) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_D(F(-), d) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_C(-, G'(d)) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_C(-, G(d')) \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Hom}_D(F(-), d') \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Hom}_C(-, G'(d'))
\end{tikzcd}$$

où les isomorphismes horizontaux sont induits par i et i' et les morphismes verticaux par f. Par définition de j, les lignes horizontales correspondent par l'isomorphisme de Yoneda aux isomorphismes $j(d) : G(d) \to G'(d)$ et $j(d') : G(d') \to G'(d')$. En utilisant encore Yoneda, on en déduit l'équation $G'(f) \circ j(d) \cong j(d') \circ G(f)$ qui est exactement dire que j est un isomorphisme naturel. $\square$

6. Limites et colimites

Soit I une petite catégorie, et C une catégorie quelconque, on dispose d'un foncteur

$$\delta_I : C \to \mathrm{Fon}(I, C)$$

qui envoie l'objet x sur le foncteur $\delta_I(x)$ qui envoie tous les objets de I sur x et tous les morphismes de I sur id_x.

DÉFINITION 1.39. Soit $X : I \to C$ un foncteur. On dit qu'une paire (c, j), où c est un objet c de C et $j : X \to \delta_I c$ est une tranformation naturelle, est une colimite pour X si la composée

$$\mathrm{Hom}_C(c, -) \xrightarrow{\delta_I} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fon}(I,C)}(\delta_I(c), \delta_I(-)) \xrightarrow{j} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fon}(I,C)}(X, \delta_I(-))$$

est un isomorphisme de foncteurs.

De même on dit qu'une paire (d, j), avec $j : \delta_I d \to X$ une transformation naturelle, est une limite pour X si la composée

$$\mathrm{Hom}_C(-, d) \xrightarrow{\delta_I} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fon}(I,C)}(\delta_I(-), \delta_I(d)) \xrightarrow{j} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fon}(I,C)}(\delta_I(-), X)$$

est un isomorphisme de foncteurs.

Il arrive que des foncteurs $I \to C$ ne possèdent pas de limite (resp. colimite). Cependant si une limite (resp. colimite) existe, elle est unique à isomorphisme unique près par le lemme de Yoneda. Il n'est donc pas abusif de noter $\mathrm{colim}_I X$ ou $\lim_I X$ pour n'importe quel choix de colimite ou de limite pour X.

THÉORÈME 1.40. *Soit $F : C \to D$ un adjoint à gauche. Soit I une petite catégorie. Soit $X : I \to C$, un foncteur. On suppose que X et $F \circ X$ admettent une colimite, alors le morphisme*

$$F \circ X \to F \circ \delta_I(\mathrm{colim}\, X) \cong \delta_I F(\mathrm{colim}_I X)$$

fait de $F(\mathrm{colim}_I X)$ la colimite du diagramme $F \circ X$.

De même si $F : C \to D$ est un adjoint à droite et si X et $F \circ X$ admettent des limites, alors l'application évidente

$$\delta_I F(\lim_I X) \cong F \circ (\delta_I \lim_I X) \to F \circ X$$

fait de $F(\lim_I X)$ *la limite du diagramme* $F \circ X$*.*

On peut résumer ce théorème informellement par le slogan “un adjoint à gauche préserve les colimites et un adjoint à droite préserve les limites”.

Preuve. On traite le cas des limites, l'autre cas se traite dualement. Il s'agit de montrer que $F(\lim_I X)$ représente le bon foncteur. On note $L : D \to C$ l'adjoint à gauche de F. On note également $\tilde{F} : \mathrm{Fon}(I, C) \to \mathrm{Fon}(I, D)$ le foncteur de postcomposition par F et $\tilde{L} : \mathrm{Fon}(I, D) \to \mathrm{Fon}(I, C)$ le foncteur de postcompostion par L. On a une structure d'adjonction sur ces deux foncteurs déduite de l'adjonction entre L et F

On a une suite d'isomorphisme de foncteurs $D^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ens}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_D(-, F(\lim_I X)) &\cong \mathrm{Hom}_C(L(-), \lim_I X) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fon}(I,C)}(\delta_I L(-), X) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fon}(I,C)}(\tilde{L}(\delta_I(-)), X) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fon}(I,D)}(\delta_I(-), \tilde{F}(X)) \\
&\cong \mathrm{Hom}_D(-, \lim_I F \circ X)
\end{aligned}$$

□

On peut aussi poser la définition suivante.

Définition 1.41. Soit I une petite catégorie et C une catégorie. Si le foncteur $\delta_I : C \to \mathrm{Fon}(I, C)$ possède un adjoint à gauche (resp. à droite), on notera cet adjoint colim_I (resp. $\lim_I$) et on l'appellera le foncteur de I-colimite (resp. I-limite).

Cette définition n'est pas abusive grâce à la proposition suivante.

Proposition 1.42. *Si* $X : I \to C$ *est un foncteur, la counité de l'adjonction* $(\mathrm{colim}_I, \delta_I)$ *en* X *nous donne un morphisme* $X \to \delta_I(\mathrm{colim}_I X)$ *qui fait de* $\mathrm{colim}_I X$ *la colimite de* X*. Dualement l'unité de l'adjonction* $(\delta_I, \lim_I)$ *en* X *donne un morphisme* $\delta_I(\lim_I X) \to X$ *qui fait de* $\lim_I X$ *la limite de* X*.*

Preuve. Vérification immédiate. □

7. Exemples de limites et colimites

Étant donné un ensemble U, on peut considérer U comme une catégorie dont l'ensemble des objets est U et dont les seuls morphismes sont les identités. Un U-diagramme dans une catégorie C est simplement la donnée d'une famille d'objets de C indexée par U.

Définition 1.43. Soit $X : U \to C$ un U-diagramme dans C, sa limite lorsque elle existe est appellée le produit des objets $\{X(u)\}_{u \in U}$ et sa colimite est appellée le coproduit des objets $\{X(u)\}_{u \in U}$.

Exemple 1.44. Donnons quelques exemples de produits et de coproduits.

- Dans le catégorie des ensemble, le produit des objets $\{X(u)\}_{u \in U}$ est simplement l'ensemble produit $\prod_u X(u)$. Le coproduit des objets $\{X(u)\}_{u \in U}$ est l'union disjointe $\bigsqcup_u X(u)$.
- Dans la catégorie des groupes abéliens, le produit des objets $\{X(u)\}_{u \in U}$ est le produit des groupes abéliens et le coproduit des objets $\{X(u)\}_{u \in U}$ est la somme directe $\bigoplus_{u \in U} X(u)$.
- Dans la catégorie **Top** le produit d'une famille $\{X(u)\}_{u \in U}$ est simplement le produit ensembliste muni de la topologie produit. Le coproduit d'une famille $\{X(u)\}_{u \in U}$ est le coproduit ensembliste $\sqcup_{u \in U} X(u)$ muni de la topologie dans laquelle un sous ensemble est un ouvert si son intersection avec chacun des $X(u)$ est ouverte.

On note P l'ensemble partiellement ordonné des sous-ensembles stricts de $\{0,1\}$. On vérifie sans peine qu'un foncteur F de P dans une catégorie C est la donné d'un diagramme de la forme suivante

$$\begin{tikzcd} X_\varnothing \arrow[r] \arrow[d] & X_0 \\ X_1 & \end{tikzcd}$$

De même un foncteur $P^{\mathrm{op}} \to C$ est la donnée d'un diagramme de la forme suivante

$$\begin{tikzcd} & X_0 \arrow[d] \\ X_1 \arrow[r] & X_\varnothing \end{tikzcd}$$

Définition 1.45. Soit C une catégorie, $X : P \to C$ un foncteur, la colimite d'un P-diagramme dans C est appellée somme amalgamée du diagramme. De même la limite d'un P^{op}-diagramme dans C est appellée produit fibré.

Exemple 1.46. Donnons quelques exemples de sommes amalgamées et de produits fibrés.

- Soit

$$\begin{tikzcd} X_\varnothing \arrow[r] \arrow[d] & X_0 \\ X_1 & \end{tikzcd}$$

un P-diagramme dans **Ens**, alors sa somme amalgamée existe et est donnée par l'ensemble quotient $(X_0 \sqcup X_1)/\simeq$ ou $\simeq$ est la relation d'équivalence la plus fine qui identifie un point x_0 de X_0 avec un point x_1 de X_1 s'il existe un point de $X_\varnothing$ dont l'image dans X_0 est x_0 et l'image dans X_1 est x_1.
- Soit

$$\begin{tikzcd} & X_0 \arrow[d] \\ X_1 \arrow[r] & X_\varnothing \end{tikzcd}$$

un P^{op}-diagramme dans la catégorie **Ens**. Le produit fibré de ce diagramme existe et est donné par le sous-ensemble de $X_0 \times X_1$ contenant les paires (x_0, x_1) ayant la même image dans $X_\varnothing$.
- Si dans l'exemple précédent les trois ensemble X_0, X_1 et $X_\varnothing$ ont une structure de groupe (resp. groupe abélien, resp. k-module, resp. anneau), alors le produit fibré ensembliste est naturellement muni de la même structure et définit le produit fibré dans **Grp** (resp. **Ab**, $\mathbf{Mod}_k$, **An**). Ce n'est pas très suprenant, en effet on rappelle que dans chaque cas le foncteur oubli est un adjoint à droite, cela implique que les limites dans **Grp** (resp. **Ab**, $\mathbf{Mod}_k$, **An**) ont pour ensemble sous-jacent la limite correspondante dans **Ens**.
- Soit

$$\begin{tikzcd} X_\varnothing \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, "i_1"'] & X_0 \\ X_1 & \end{tikzcd}$$

un P-diagramme dans **Ab**, alors sa somme amalgamée existe et est donnée par le groupe abélien quotient $(X_0 \oplus X_1)/\operatorname{im}(X_\varnothing)$ où $\operatorname{im}(X_\varnothing)$ désigne l'image du morphisme de groupe abéliens

$$\begin{aligned} X_\varnothing &\to X_0 \oplus X_1 \\ x &\mapsto i_0(x) + i_1(x) \end{aligned}$$

CHAPITRE 2

Groupe fondamental

1. Homotopie

On note I l'intervalle fermé $[0,1]$.

DÉFINITION 2.1. Soient $f_0 : X \to Y$ et $f_1 : X \to Y$ deux applications continues entre espaces topologiques. Une homotopie entre f_0 et f_1 est une application continue $h : I \times X \to Y$ telle que $h(0,-) = f_0$ et $h(1,-) = f_1$. S'il existe une homotopie entre f_0 et f_1, on dit qu'elles sont homotopes.

PROPOSITION 2.2. *La relation d'homotopie est une relation d'équivalence entre applications continues de X dans Y.*

PREUVE. Élémentaire. □

NOTATION 2.3. Si X et Y sont deux espaces topologique, on note $[X,Y]$ le quotient de l'ensemble des applications continues de X dans Y par la relation d'homotopie.

EXEMPLE 2.4. L'ensemble $[*,X]$ s'identifie avec l'ensemble des composantes connexes par arcs de X. On note cet ensemble $\pi_0(X)$.

PROPOSITION 2.5. *Si $f : X \to Y$ est homotope à g et $f' : Y \to Z$ est homotope à g' alors $f' \circ f$ est homotope à $g' \circ g$.*

PREUVE. Par transitivité de la relation d'homotopie, il suffit de montrer que $f' \circ f$ est homotope à $g' \circ f$ et $g' \circ f$ est homotope à $g' \circ g$. Soit h une homotopie entre f et g, alors la composée

$$I \times X \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{g'} Z$$

fournit une homotopie entre $g' \circ f$ et $g' \circ g$. Soit h' une homotopie entre f' et g', alors la composée

$$I \times X \xrightarrow{\mathrm{id}_I \times f} I \times Y \xrightarrow{h'} Z$$

fournit une homotopie entre $f' \circ f$ et $g' \circ f$. □

On peut donc construire une catégorie **hTop** dont les objets sont les espaces topologiques et les morphismes entre deux espaces X et Y sont donnés par la formule

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{hTop}}(X,Y) = [X,Y]$$

DÉFINITION 2.6. Un isomorphisme dans la catégorie **hTop** est appelé une équivalence d'homotopie. Deux objets isomorphes de **hTop** sont dits homotopiquement équivalents. On peut également dire qu'ils ont le même type d'homotopie. Un espace X est dit contractile si l'unique application $X \to *$ est une équivalence d'homotopie.

Donnons deux exemples d'équivalences d'homotopies.

DÉFINITION 2.7. Une partie étoilée de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble C de $\mathbb{R}^n$ tel que, si $x \in C$, alors $tx \in C$ pour tout $t \in [0,1]$.

PROPOSITION 2.8. *Soit C une partie étoilée de $\mathbb{R}^n$. Alors C est contractile.*

PREUVE. Notons $p : C \to *$ l'unique application et $i : * \to C$ l'inclusion du point 0 dans C. L'application $p \circ i$ est l'identité. L'application $i \circ p$ est homotope à l'identité de C par l'homotopie

$$h(t,x) = tx$$

□

PROPOSITION 2.9. *Soit $S^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$ la sphère unité. L'inclusion $S^d \to \mathbb{R}^d - \{0\}$ est une équivalence d'homotopie.*

PREUVE. Notons i cette inclusion et notons f l'application $\mathbb{R}^d - \{0\} \to S^{d-1}$ donnée par $f(x) = \frac{x}{\|x\|}$. On a $f \circ i = \mathrm{id}_{S^1}$ d'autre part on peut construire une homotopie h entre $i \circ f$ et $\mathrm{id}_{\mathbb{C}-\{0\}}$ par la formule

$$h(t,x) = x\|x\|^{-t}$$

□

DÉFINITION 2.10. Un espace topologique pointé est une paire (X,x) où X est un espace topologique et x est un point de X appellé point base de X.

Il existe une catégorie $\mathbf{Top}_*$ des espaces topologiques pointéś dont les morphismes sont les applications continues préservant le point base. On peut aussi parler d'homotopie entre deux applications continutes entre espaces topologiques pointés.

DÉFINITION 2.11. Soient $f_0 : (X,x) \to (Y,y)$ et $f_1 : (X,x) \to (Y,y)$ deux applications continues pointées entre espaces topologiques pointés. Une homotopie pointée entre f_0 et f_1 est une application continue $h : I \times X \to Y$ telle que $h(0,-) = f_0$ et $h(1,-) = f_1$ et pour tout $t \in I$, $h(t,x) = y$.

NOTATION 2.12. On note $[(X,x),(Y,y)]_*$ l'ensemble des applications continues pointées quotienté par la relation d'homotopie pointées. Lorsque le point base est évident, on se contente de noter $[X,Y]_*$.

Muni de cette définition, on peut construire comme précédemment une catégorie $\mathbf{hTop}_*$ dont les objets sont les espaces topologiques pointés et les morphismes sont donnés par le quotient des applications continues pointées par la relation d'homotopie pointée.

DÉFINITION 2.13. Soit $(X,*)$ un espace topologique pointé et i un entier positif, on définit $\pi_i(X,x)$ par la formule

$$\pi_i(X,x) = [(S^i,\omega),(X,x)]_*$$

où ω est n'importe quel point de la sphère de dimension i.

Par construction, les applications $(X,x) \mapsto \pi_1(X,x)$ sont des foncteurs de $\mathbf{hTop}_*$ vers $\mathbf{Ens}$. On verra plus tard dans ce cours que π_1 est en fait naturellement muni d'une structure de groupe et que π_i pour $i \geq 2$ est naturellement un groupe abélien.

2. Définition du groupe fondamental

Fixons d'abord quelques notations et quelques points de terminologie. On note I l'intervalle $[0,1]$. Pour X un espace topologique, on appelle chemin de X une application continue $\gamma : I \to X$. Pour x un point de X on appelle lacet de X basé en x un chemin γ de X tel que $\gamma(0) = \gamma(1) = x$.

DÉFINITION 2.14. Soient γ et γ' deux chemins de X telle que $\gamma(0) = \gamma'(0)$ et $\gamma(1) = \gamma'(1)$. Une homotopie à extrémités fixes entre γ et γ' est une application continues $h : [0,1] \times [0,1] \to X$ telle que, pour tout t dans $[0,1]$, on ait $h(0,t) = \gamma(t)$, $h(1,t) = \gamma'(t)$, $h(t,0) = \gamma(0)$ et $h(t,1) = \gamma(1)$. On dit que les chemins γ et γ' sont homotopes à extrémités fixes s'il existe une homotopie à extrémités fixes entre eux.

NOTATION 2.15. Pour γ et γ' deux chemins de X avec $\gamma(1) = \gamma'(0)$, on note $\gamma' * \gamma$ le chemin définit par la formule

$$\begin{aligned} \gamma' * \gamma(t) &= \gamma(2t) \text{ si } t \in [0, 1/2] \\ &= \gamma'(2t-1) \text{ si } t \in [1/2, 1] \end{aligned}$$

Pour γ un chemin de X, on note γ^{-1} le chemin de X donné par l'équation

$$\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$$

PROPOSITION 2.16. *Soient γ et γ' sont deux chemins de X homotopes à extrémités fixes*

- *Si γ'' est un troisième chemin de X avec $\gamma''(0) = \gamma(1)$, alors $\gamma'' * \gamma$ est homotope à extrémité fixe à $\gamma'' * \gamma'$.*
- *Si γ'' est un troisième chemin de X avec $\gamma''(1) = \gamma(0)$, alors $\gamma * \gamma''$ est homotope à extrémité fixe à $\gamma' * \gamma''$.*
- *Le chemin γ^{-1} est homotope à extrémité fixe à $(\gamma')^{-1}$*

PREUVE. La preuve est facile et laissée au lecteur. □

PROPOSITION 2.17. *Soient γ, γ' et γ'' trois chemins de X avec $\gamma(1) = \gamma'(0)$ et $\gamma'(1) = \gamma''(0)$. Alors $(\gamma'' * \gamma') * \gamma$ est homotope à extrémité fixes à $\gamma'' * (\gamma' * \gamma)$.*

PREUVE. On introduit une notation simplificatrice. Soit γ n'importe quel chemin de X. Étant donné un intervalle fermé $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ avec $a \neq b$, on note $\gamma_{[a,b]}$ l'application $[a, b] \to X$ donnée par $\gamma \circ \phi$ où $\phi : [a, b] \to [0, 1]$ est l'homéomorphisme $\phi(x) = \frac{x-a}{b-a}$. On définit alors une homotopie $h : I^2 \to X$ par la formule

$$\begin{aligned} h(s,t) &= \gamma_{[0, \frac{1+s}{4}]}(t) \ \text{ si } t \in [0, \frac{1+s}{4}], \\ &= \gamma'_{[\frac{1+s}{4}, \frac{2+s}{4}]}(t) \ \text{ si } t \in [\frac{1+s}{4}, \frac{2+s}{4}], \\ &= \gamma''_{[\frac{2+s}{4}, 1]}(t) \ \text{ si } t \in [\frac{2+s}{4}, 1] \end{aligned}$$

□

Dans la proposition suivante, pour x un point de x, on note c_x le chemin constant de valeur x.

PROPOSITION 2.18. *Soit γ un chemin de X, alors $\gamma^{-1} * \gamma$ est homotope à extrémité fixes à $c_{\gamma(0)}$ et $\gamma * \gamma^{-1}$ est homotope à extrémités fixes à $c_{\gamma(1)}$.*

PREUVE. On traite le premier cas, le second est analogue. Pour s dans $[0, 1]$, on note γ_s le chemin $\gamma_s(t) = \gamma(st)$. On a $\gamma_0 = c_{\gamma(0)}$ et $\gamma_1 = \gamma$. On construit une homotopie $h : I^2 \to X$ par la formule

$$h(s,t) = (\gamma_s^{-1} * \gamma_s)(t)$$

On a bien $h(0, t) = c_{\gamma(0)}$ et $h(1, t) = \gamma^{-1} * \gamma$. □

Nous pouvons maintenant définir le groupe fondamental.

DÉFINITION 2.19. Soit (X, x) un espace topologique pointé. Le groupe fondamental de X basé en x noté $\pi_1(X, x)$ est défini de la façon suivante.

- L'ensemble sous-jacent de $\pi_1(X, x)$ est l'ensemble des classes d'homotopies à extrémités fixes des chemins γ de X avec $\gamma(0) = \gamma(1) = x$.
- L'élément neutre est la classe du chemin constant c_x.
- La multiplication est l'opération $*$.

Les Propositions 2.16, 2.17 et 2.18 montrent respectivement que l'opération $*$ est bien définie lorsqu'on passe au quotient, que l'opération ainsi obtenue est bien associative et que tout élément a un inverse de sorte que $\pi_1(X, x)$ est effectivement un groupe.

Pour $f : (X, x) \to (Y, y)$ une application continue entre espaces pointés, on note $\pi_1(f)$ l'application qui envoie la classe d'un lacet γ sur la classe de $f \circ \gamma$.

PROPOSITION 2.20. *L'application $\pi_1(f)$ est bien définie et est un morphisme de groupe.*

PREUVE. Il faut s'assurer que si γ et γ' sont homotopes à extrémités fixes, alors $f \circ \gamma$ et $f \circ \gamma'$ le sont également ce qui est évident. Par ailleurs, on a $f \circ c_x = c_y$ et $f \circ (\gamma * \gamma') = f \circ \gamma * f \circ \gamma'$ ce qui implique que $\pi_1(f)$ est bien un morphisme de groupe. □

PROPOSITION 2.21. *L'application π_1 ainsi définie est un foncteur $\mathbf{Top}_* \to \mathbf{Grp}$.*

PREUVE. Il s'agit simplement de vérifier que $\pi_1(f \circ g) = \pi_1(f) \circ \pi_1(g)$. □

PROPOSITION 2.22. *Si f et g de (X, x) vers (Y, y) sont deux applications pointées continues homotopes, alors $\pi_1(f) = \pi_1(g)$.*

PREUVE. Soit h une homotopie pointée entre f et g, alors $(s, t) \mapsto h(s, \gamma(t))$ est une homotopie à extrémité fixe entre $t \mapsto f \circ \gamma(t)$ et $t \mapsto g \circ \gamma(t)$. □

Pour résumer le travail accompli jusqu'à maintenant, on a le théorème suivant.

THÉORÈME 2.23. *Le groupe fondamental π_1 est un foncteur de la catégorie $\mathbf{hTop}_*$ vers la catégorie des groupes.*

Par ailleurs cette définition du groupe fondamental coïncide avec celle de la section précédente.

PROPOSITION 2.24. *Il exsite une bijection naturelle en (X, x)*

$$a : \pi_1(X, x) \cong [(S^1, 1), (X, x)]_*$$

PREUVE. Cette bijection est construite de la manière suivante : étant donné un lacet $\gamma : [0, 1] \to X$ basé en x, on a une application $a(\gamma) : S^1 \to X$ donnée par la formule $a(\gamma)(e^{2i\pi t}) = \gamma(t)$. On vérifie que si γ est homotope à extrémité fixe à γ' alors $a(\gamma)$ est homotope à $a(\gamma')$ de sorte que a définit bien une application

$$\pi_1(X, x) \to [(S^1, 1), (X, x)]_*$$

On laisse au lecteur le soin de construire un inverse à a. □

Étudions la dépendance en le point base du groupe fondamental. On se donne un espace topologique connexe par arcs X, deux points x et y de X et $\gamma : [0, 1] \to X$ un chemin de x à y. Nous pouvons construire une application ensembliste

$$k_\gamma : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, y)$$

qui envoie la classe d'homotopie du lacet $\lambda : [0, 1] \to X$ sur la classe d'homotopie de $\gamma * \lambda * \gamma^{-1}$. Par la Proposition 2.17, on peut parenthéser comme on le souhaite et par la Proposition 2.16 celà est bien indépendant du choix de λ dans sa classe d'homotopie.

PROPOSITION 2.25. *L'application k_γ est un isomorphisme de groupe.*

PREUVE. Montrons que k_γ est un morphisme de groupe. Soient λ et λ' deux lacets de X basés en x. On a

$$k_\gamma([\lambda * \lambda']) = [\gamma * \lambda * \lambda' * \gamma^{-1}] = [\gamma * \lambda * \gamma^{-1} * \gamma * \lambda' * \gamma^{-1}] = k_\gamma(\lambda) k_\gamma(\lambda')$$

Pour montrer que k_γ est un isomorphisme, il suffit d'observer que son inverse est donné par $k_{\gamma^{-1}}$. □

3. Calcul du groupe fondamental du cercle

Notre modèle pour le cercle est l'ensemble S^1 des nombres complexes de module 1. On note $p : \mathbb{R} \to S^1$ l'application

$$p(t) = e^{2i\pi t}$$

LEMME 2.26 (Lemme du relèvement). *Soient B un espace topologique et A un sous-espace connexe de B. Soit $i : A \to B$ l'inclusion. On suppose que l'on dispose d'un carré commutatif*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "f"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

dans la catégorie des espaces topologique. On suppose que l'application f n'est pas surjective. Alors il existe une unique application $h : B \to \mathbb{R}$ telle que, dans le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, "h"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

les deux triangles soient commutatifs.

PREUVE. Soit $z = e^{2i\pi u}$ un point de S^1 qui n'est pas dans l'image de f. Soit $U = S^1 - z$ et $V = p^{-1}(U)$. On observe qu'on a l'égalité

$$V = \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}}]u+n, u+n+1[$$

Par hypothèse, f se factorise par le sous-espace U et par commutativité du carré, g se factorise par V. Puisque l'espace A est connexe, il existe un unique n tel que g se factorise par $]u+n, u+n+1[$. On peut donc factoriser notre carré commutatif de la manière suivante

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"'] &]u+n, u+n+1[\arrow[r] \arrow[d, "p'"] & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "f"'] & U \arrow[r] & S^1 \end{tikzcd}$$

où les applications horizontales du carré de droite sont les inclusions et l'application p' est la restriction de p. Puisque p' est un homéomorphisme, il existe une unique application $h' : B \to]u+n, u+n+1[$ telle que, dans le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"'] &]u+n, u+n+1[\arrow[d, "p'"] \\ B \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, "h'"'] & U \end{tikzcd}$$

les deux triangles commutent. La composée de h' avec l'inclusion $]u+n, u+n+1[\to \mathbb{R}$ fournit une application h qui satisfait aux conditions du lemme. L'unicité de h' implique facilement l'unicité de h. $\square$

Le lemme suivant nous sera utile plusieurs fois.

LEMME 2.27. *Soit $\{U_i\}_{i\in I}$ un recouvrement de l'espace topologique $[0,1]^d$. Alors, il existe un entier n tel que, pour tout d-uplet $(k_1,\dots,k_d)$ de nombres entiers dans $\{0,\dots,n-1\}$, il existe un indice i tel que le cube*

$$\{\frac{1}{n}(k_1+t_1,\dots,k_d+t_d),(t_1,\dots,t_d)\in[0,1]^d\}$$

soit entièrement contenu dans U_i.

PREUVE. Avant de donner la preuve donnons une version moins formelle de l'énoncé. On dit simplement que, quitte à choisir n suffisament grand, on peut s'arranger pour que tous les cubes de la subdivision du cube $[0,1]^d$ en petit cubes de côté $1/n$ soient contenus dans l'un des ouverts du recouvrement.

Prouvons maintenant le lemme. Puisque $[0,1]^d$ est un espace topologique compact, on peut supposer sans perte de généralité que le recouvrement est fini. Supposons alors que le lemme ne soit pas vérifié, on peut donc trouver, pour tout n, un point $x_n=\frac{1}{n}(k_1,\dots,k_n)$ tel que tel que la boule fermée de rayon $1/n$ (pour la norme sup des valeurs absolues de coordonnées) ne soit contenue dans aucun des ouverts du recouvrement. Quitte à prendre une suite extraite, on peut supposer que la suite x_n converge. Notons x sa limite. Le point x est dans l'un des ouverts du recouvrement. On peut donc trouver ϵ tel que la boule ouverte de centre x et de rayon ϵ soit entièrement contenue dans l'un des ouverts du recouvrement. D'un autre côté, quitte, à choisir n assez grand, la boule fermée de centre x_n et de rayon $1/n$ est entièrement contenue dans la boule ouverte de centre x et de rayon ϵ ce qui est une contradiction. □

PROPOSITION 2.28. *Soit $i:\{0\}\to I$ l'inclusion. Alors l'application $p:\mathbb{R}\to S^1$ a la propriété de relèvement unique par rapport à i. C'est-à-dire : pour tout carré commutatif*

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ {[0,1]} \arrow[r] & S^1 \end{tikzcd}$$

il existe une unique application $h:[0,1]\to\mathbb{R}$ qui fait commuter les deux triangles dans le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ {[0,1]} \arrow[r] \arrow[ur, "h"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

De même l'application p a la propriété de relèvement unique par rapport à l'inclusion

$$j:\{0\}\times I\to I^2$$

PREUVE. On traite le cas de j, l'autre cas est analogue. On se donne un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ I^2 \arrow[r, "g"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

Recouvrons S^1 par deux ouverts de S^1 chacun des deux distincts de S^1 (on peut par exemple prendre les complémentaires des complexes 1 et -1). Par le Lemme 2.27, on peut donc trouver un entier positif N tel que la restriction de g à tout carré de la forme $[k/N,(k+1)/N]\times[l/N,(l+1)/N]$ avec k et l des nombres entiers soit contenue dans l'un des deux ouverts et donc soit non-surjective. On constuit ensuite l'application h de proche en proche. On commence par la construire sur le carré $[0,1/N]\times[0,1/N]$ en appliquant le lemme du relèvement en observant que h est déjà prescrite sur le côté gauche du carré qui est un sous-espace connexe. On construit ensuite h sur la carré $[1/N,2/N]\times[0,1/N]$ de manière analogue.

Une fois que l'on a construit h sur toute la bande $[0,1] \times [0,1/N]$, on l'étend à la bande $[0,1] \times [2/N]$ en utilisant le même procédé. On continue de la sorte bande par bande jusqu'à avoir construit h sur le carré tout entier. $\square$

On va maintenant construire un morphisme de groupe

$$\delta : \pi_1(S^1, 1) \to \mathbb{Z}$$

Soit $\gamma : [0,1] \to S^1$ une application continue telle que $\gamma(0) = \gamma(1) = 1$. Par la proposition précédente, il existe une unique application $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ et $\tilde{\gamma}(0) = 0$. En particulier $p(\tilde{\gamma})(1) = 1$ et donc $\tilde{\gamma}(1)$ est un nombre entier. On note ce nombre entier $\delta(\gamma)$. Commençons par montrer la proposition suivante.

Proposition 2.29. *La valeur de $\delta(\gamma)$ ne dépend que de la classe d'homotopie à extrémités fixes de γ. En d'autres termes, δ se factorise en une application d'ensembles*

$$\pi_1(S^1) \to \mathbb{Z}$$

Preuve. Soient γ_0 et γ_1 deux application continues $[0,1] \to S^1$ telles qu'il existe une homotopie à extrémités fixes entre γ_0 et γ_1. Explicitement, il existe une application continue $H : [0,1] \times [0,1]$ satisfaisant les conditions suivantes

- On a les équations $H(0,t) = \gamma_0(t)$ et $H(1,t) = \gamma_1(t)$.
- On a $H(u,0) = H(u,1) = 1$.

On peut donc construire une application $\tilde{H} : I \times \{0\} \to \mathbb{R}$ donnée par la formule $\tilde{H}(u,0) = 0$. La proposition précédente nous dit qu'on peut prolonger $\tilde{H}$ de manière unique en une application $\tilde{H} : I^2 \to \mathbb{R}$ qui soit telle que $p \circ \tilde{H} = H$. La restriction de $\tilde{H}$ à l'intervalle $\{0\} \times I$ (resp. $\{1\} \times I$) doit être égale à $\tilde{\gamma_0}$ (resp. $\tilde{\gamma_1}$) par unicité du relèvement de γ_0 et γ_1. La restriction de $\tilde{H}$ à l'intervalle $I \times \{1\}$ fournit un chemin continu dans $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. Ce chemin doit donc être constant et $\tilde{\gamma}_0(1) = \tilde{\gamma}_1(1)$ comme souhaité. $\square$

Proposition 2.30. *L'application δ est un morphisme de groupe*

$$\delta : \pi_1(S^1) \to \mathbb{Z}$$

Preuve. On vérifie aisément que δ envoie le chemin constant sur 0.

Soient γ et γ' deux lacets $[0,1] \to S^1$. Soient $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}$ l'unique relèvement de γ avec $\tilde{\gamma}(0) = 0$. Soit $\tilde{\gamma}'$ l'unique relèvement de γ' avec $\tilde{\gamma}'(0) = 0$. Le chemin $\tilde{\gamma}' + \delta(\gamma)$ est donc l'unique relèvement de γ' prenant la valeur $\tilde{\gamma}(1)$ en 0. Ce chemin prend la valeur $\delta(\gamma) + \delta(\gamma')$ en 1. Clairement la concaténation $\tilde{\gamma} * (\tilde{\gamma}' + \delta(\gamma))$ est un relèvement de $\gamma * \gamma'$ qui vaut 0 en 0. Par unicité d'un tel relèvement, on a donc

$$\delta(\gamma * \gamma') = (\tilde{\gamma} * (\tilde{\gamma}' + \delta(\gamma)))(1) = \delta(\gamma) + \delta(\gamma')$$

On montrerait de manière analogue que $\delta(\gamma^{-1}) = -\delta(\gamma)$. $\square$

Proposition 2.31. *L'application δ est un isomorphisme de groupe.*

Preuve. On commence par montrer la surjectivité de δ. Puisque l'image de δ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$, il suffit de montrer que ce sous-groupe contient 1. Mais il est facile de vérifier que $1 \in \mathbb{Z}$ peut s'obtenir comme δ de l'application identité $S^1 \to S^1$.

Pour montrer l'injectivité de δ, on montre que son noyau est réduit à l'élément neutre. On considère donc un chemin $\gamma : [0,1] \to S^1$ qui est tel que $\delta(\gamma) = 0$. Il s'agit de montrer qu'il est homotope à un chemin constant. Par définition, γ admet un relèvement $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}$ avec $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(1) = 0$. On sait que $\pi_1(\mathbb{R}, 0) = 0$. On en déduit donc qu'il existe une homotopie $H : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ entre $\tilde{\gamma}$ et le lacet constant. On constate alors que $p \circ H$ est une homotopie entre γ et un chemin constant. $\square$

On a donc calculé l'ensemble $[S^1, S^1]_*$ des classes d'homotopie pointées d' applications de S^1 vers S^1. On peut sans grandes difficultés en déduire l'ensemble $[S^1, S^1]$ des classes d'homotopies d'application non pointées.

Proposition 2.32. *L' application évidente*

$$[S^1, S^1]_* \to [S^1, S^1]$$

est une bijection.

Preuve. Noter que cette application n'est ni injective ni surjective a priori. En effet, il faut prendre garde au fait qu'il pourrait exister une homotopie ne préservant pas le point base entre deux applications pointées.

On va construire une application qui va dans l'autre sens. Etant donné $f : S^1 \to S^1$, on peut construire $\tilde{f}$ par la formule $\tilde{f}(z) = f(z)f(1)^{-1}$. Clairement $\tilde{f}$ est une application pointé. De même si $H : S^1 \times [0, 1] \to S^1$ est une homotopie, on peut construire $\tilde{H}$ par la formule $\tilde{H}(z, t) = H(z, t)H(1, t)^{-1}$. Si H est une homotopie entre $f = H(z, 0)$ et $g = H(z, 1)$, alors $\tilde{H}$ est une homotopie pointée entre $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$. On a donc construit une application

$$[S^1, S^1] \to [S^1, S^1]_*$$

Il est évident que la composée

$$[S^1, S^1]_* \to [S^1, S^1] \to [S^1, S^1]_*$$

est égale à l'identité. Pour montrer que la composée

$$[S^1, S^1] \to [S^1, S^1]_* \to [S^1, S^1]$$

est égale à l'identité, il s'agit de montrer que pour tout f, f et $\tilde{f}$ sont homotopes. Choisissons n'importe quel chemin γ reliant 1 à $f(1)$, alors, une homotopie entre f et $\tilde{f}$ est donnée par

$$H(z, t) = f(z)\gamma(t)^{-1}$$

□

À ce stade nous pouvons donner une preuve très rapide du théorème fondamental de l'algèbre.

Théorème 2.33. *Soit $f(z)$ un polynôme à coefficients complexes sans racines, alors f est constant.*

Preuve. Notons d le degré de f. Sans perte de généralité, on suppose que le coefficient de z^d est 1. On choisit un homéomorphisme ϕ entre $I = [0, 1[$ et $[0, +\infty[$, on peut par exemple prendre $\phi(t) = \tan(t\pi/2)$. On considère l'application $H : S^1 \times [0, 1[\to S^1$ donnée par la formule

$$H(z, t) = \frac{f(\phi(t)z)}{|f(\phi(t)z)|}$$

On peut prolonger H par continuité en $t = 1$ par la formule $H(z, 1) = z^d$. On a donc construit une homotopie entre l'application constante $S^1 \to S^1$ de valeur $f(0)$ et l'application $z \mapsto z^d$. La première de ces applications est de degré 0 alors que la seconde est de degré d. On en déduit donc que $d = 0$. □

Donnons deux autres applications de ce calcul.

Proposition 2.34. *Il n'existe pas d'application continue* $\log : \mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C}$ *telle que* $\exp(\log(z)) = z$ *pour tout $z \in \mathbb{C} - \{0\}$.*

Preuve. Supposons qu'une telle application existe, notons $u = \log(1)$. On peut considérer les morphismes de groupes suivants

$$\pi_1(\mathbb{C} - \{0\}, 1) \xrightarrow{\pi_1(\log)} \pi_1(\mathbb{C}, u) \xrightarrow{\pi_1(\exp)} \pi_1(\mathbb{C} - \{0\}, 1)$$

Leur composée doit être l'identité de $\mathbb{Z} \cong \pi_1(\mathbb{C} - \{0\}, 1)$. Par ailleurs le groupe $\pi_1(\mathbb{C}, z)$ est trivial ce qui est absurde. □

Proposition 2.35. *Soit $n \geq 2$, il n'existe pas d'application continue $R_n : \mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C} - \{0\}$ telle que $R_n(z)^n = z$.*

PREUVE. On suppose qu'une telle application existe, on note $z = R_n(1)$. On considère les morphismes de groupes suivants

$$\pi_1(\mathbb{C} - \{0\}, 1) \xrightarrow{\pi_1(R_n)} \pi_1(\mathbb{C} - \{0\}, z) \xrightarrow{\pi_1(z \mapsto z^n)} \pi_1(\mathbb{C} - \{0\}, 1)$$

Leurs composée doit être l'identité. D'un autre côté, il est facile de vérifier que le second morphisme a pour image le sous-groupe $n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$. □

On peut également calculer les groupes d'homotopie supérieurs de S^1.

PROPOSITION 2.36. *Pour $d \geq 2$, l'application $p : \mathbb{R} \to S^1$ a la propriété de relèvement unique par rapport à l'inclusion*

$$k : \partial I^d \to I^d$$

PREUVE. La preuve est analogue à celle de la Proposition 2.28. □

PROPOSITION 2.37. *Pour tout $d \geq 2$, on a $\pi_d(S^1) \cong \{0\}$.*

PREUVE. L'application $p : (\mathbb{R}, 0) \to (S^1, 1)$ induit un morphisme

$$\pi_d(p) : \pi_d(\mathbb{R}) \to \pi_d(S^1)$$

pour tout $d \geq 2$. On va montrer que ces morphismes sont surjectifs. Comme $\mathbb{R}$ est contractile, on a $\pi_d(\mathbb{R}) = \{0\}$ et celà nous permettra bien de conclure. Considérons donc une application $\alpha : S^d \to S^1$ qui envoie le point base de S^d sur 1. En utilisant l'homéomorphisme évident

$$S^d \cong I^d / \partial I^d$$

on peut voir α comme une application qu'on note encore α de I^d vers S^1 qui prend la valeur 1 sur le bord de I^d. Par la proposition précédente, on peut relever α en une application $\tilde{\alpha} : I^d \to \mathbb{R}$ prenant la valeur 0 sur le bord de I^d. Celà montre donc la surjectivité de $\pi_d(p)$. □