

Chapitre 1

Espaces vectoriels

1.1 Structure d'espace vectoriel

On se place pour le moment dans un cadre abstrait qui couvre beaucoup de situations déjà rencontrées.

Définition 1.1 Soit $K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ (K est un corps). Un **espace vectoriel** sur K , ou K -espace vectoriel, est un ensemble E non vide, muni d'une loi de composition interne, appelée addition et notée $+$ qui en fait un groupe commutatif (ou abélien), i.e.

(addition) $+$: $x, y \in E \mapsto x + y \in E$ munie des propriétés :

1. (associativité de $+$) $\forall x, y, z \in E, (x + y) + z = x + (y + z)$;
2. (élément neutre pour $+$) : il existe un vecteur noté 0_E , ou simplement 0 , tel que $\forall x \in E, x + 0 = 0 + x = x$; ce vecteur s'appelle le vecteur nul ;
3. (existence d'un inverse, ou symétrique) : $\forall x \in E, \exists y \in E, x + y = y + x = 0$; un tel y est unique et se note $-x$.
4. (commutativité de $+$) : $\forall x, y \in E, x + y = y + x$;

et d'une multiplication externe

(multiplication) \cdot : $(\lambda, x) \in K \times E \mapsto \lambda \cdot x \in E$, aussi noté λx , munie des propriétés :

1. (élément neutre pour \cdot) $\forall x \in E, 1 \cdot x = x$;
2. (associativité de \cdot) $\forall x \in E, \forall \lambda, \mu \in K, \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$;
3. (distributivité de \cdot par rapport à $+$) $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in K, \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;
4. (distributivité de \cdot par rapport à $+_K$) $\forall x \in E, \forall \lambda, \mu \in K, (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$.

Les éléments de K sont appelés scalaires, et les éléments de E vecteurs.

Remarque 1.1 On a toujours $0 \cdot x = 0_E$ et $(-1) \cdot x = -x$ pour tout $x \in E$. On a aussi $\lambda \cdot 0_E = 0_E$ et $\lambda \cdot x = 0_E$ si et seulement si $\lambda = 0$ ou $x = 0_E$.

Exemple 1.1 1. K est un espace vectoriel sur lui-même.

2. L'ensemble des vecteurs de la géométrie euclidienne en dimension 2 et 3, notés \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 .
3. \mathbb{C} est un espace vectoriel sur \mathbb{R} et sur \mathbb{Q} , \mathbb{R} est un espace vectoriel sur \mathbb{Q} .
4. L'ensemble des applications définies sur un intervalle I et à valeurs dans \mathbb{R} , \mathbb{R} .
5. L'ensemble des fonctions continues sur un intervalle I et à valeurs dans \mathbb{R} , $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.
6. L'ensemble des polynômes à une indéterminée à coefficients dans K .
7. Les suites d'éléments de K .
8. Les suites convergentes d'éléments de K .
9. Les suites d'éléments de K convergent vers 0 .

Définition 1.2 Soient E et F deux espaces vectoriels sur $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . On définit le **produit cartésien** $E \times F$ comme l'ensemble des couples (x, y) où x décrit E et y décrit F . Il peut être muni d'une structure d'espace vectoriel, appelé **l'espace vectoriel produit** :

1. $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$,
2. $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$

On peut faire aisément de même avec un nombre fini quelconque d'espaces et en déduire notamment la construction de $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) comme espaces produits.

1.2 Sous-espaces vectoriels

Définition 1.3 Soit E un espace vectoriel sur un corps K . Une partie non vide F de E est sous-espace vectoriel de E si c'est un espace vectoriel sur K pour les opérations $+$ et \cdot induites sur F .

Théorème 1.1 Une partie non vide F de E est sous-espace vectoriel de E si et seulement si elle vérifie :

1. $\forall (x, y) \in F \times F, x + y \in F$,
2. $\forall \lambda \in K, \forall x \in F, \lambda \cdot x \in F$.

Exemple 1.2 1. Dans le plan \mathbb{R}^2 , les droites passant par $(0, 0)$ sont des sous-espaces vectoriels. Dans l'espace \mathbb{R}^3 , les droites et les plans passant par $(0, 0, 0)$ sont des sous-espaces vectoriels.

2. $E =$ l'espace des suites d'éléments de K , $F =$ l'espace des suites convergentes d'éléments de K , $G =$ l'espace des suites convergeant vers 0 d'éléments de K . G est un sous-espace de F , qui est un sous-espace de E .
3. L'ensemble des fonctions réelles dérivables sur $[0, 1]$ est un sous-espace vectoriel de $C([0, 1], \mathbb{R})$.
4. $\{f \in C([0, 1], \mathbb{R}) : f(1/2) = 0\}$, $\{f \in C([0, 1], \mathbb{R}) : \int_0^1 f(t) dt = 0\}$ sont des sous espaces vectoriels de $C([0, 1], \mathbb{R})$.
5. $\{f \in C([0, 1], \mathbb{R}) : f(1/2) = 1\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel.

Exemple 1.3 1. L'intersection d'un nombre quelconque de sous-espaces vectoriels est un espace vectoriel.

2. Qu'en est-il de la réunion de sous-espaces vectoriels ?
3. Soit n un entier supérieur ou égal à 2, et a_1, a_2, \dots, a_n des éléments de K . Alors l'ensemble des vecteurs (x_1, x_2, \dots, x_n) de K^n tels que $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0$ est un sous-espace vectoriel de K^n . On le verra comme le noyau de l'application linéaire $L(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$, appelée forme linéaire.
4. L'ensemble des vecteurs (x_1, x_2, \dots, x_p) de K^p solution du système d'équations linéaires

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = 0, \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = 0 \end{cases}$$

est un sous-espace vectoriel de K^p puisque c'est une intersection de sous-espaces vectoriels. Une telle représentation est dite représentation cartésienne. Par exemple dans \mathbb{R}^3 , l'intersection de deux plans vectoriels prend, comme on le sait, la forme

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0, \\ a'x + b'y + c'z = 0 \end{cases} = 0$$

Ces deux plans sont confondus si les vecteurs $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ sont colinéaires, et s'intersectent sinon.

Définition 1.4 On appelle **combinaison linéaire** d'une famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de E tout élément x de la forme $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i$, où les λ_i sont dans \mathbb{K} et $\{i \in I : \lambda_i \neq 0\}$ est fini. On note $\text{Vect}(A)$ cet ensemble.

Définition 1.5 (Espace engendré par une partie non vide A de E) Soit A une partie non vide de l'espace vectoriel E sur \mathbb{K} . L'espace engendré par A est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A , i.e. l'ensemble des vecteurs x de la forme $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i$, où I est un ensemble fini, les x_i sont des vecteurs de E , et les λ_i des scalaires.

Théorème 1.2 L'espace engendré par A est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A :

$$\text{Vect}(A) = \bigcap_{\substack{F \text{ sev de } E \\ A \subset F}} F.$$

Démonstration $\text{Vect}(A)$ est évidemment un sous-espace vectoriel de E contenant A . Soit F un autre sous-espace vectoriel contenant A , il en contient toutes les combinaisons linéaires, donc il contient $\text{Vect}(A)$. On dit que A est une *partie génératrice* de F . ■

Exemple 1.4 (1) Dans \mathbb{R}^2 , $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ et $A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ engendrent la droite vectorielle d'équation $y = 0$;
 $A' = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix} \right\}$ et $A'_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix} \right\}$ engendrent la droite vectorielle $y - 2x = 0$; et $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ et
 $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}$ engendrent \mathbb{R}^2 .

(2) La base canonique de \mathbb{R}^n engendre \mathbb{R}^n .

(3) Les polynômes $1, X,$ et X^2 engendrent l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 2 .

(4) Dans l'espace vectoriel sur \mathbb{R} des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , le sous-espace engendré par les fonctions

$$t \mapsto \sin nt, \quad t \mapsto \cos nt, \quad n \in \mathbb{N},$$

est le sous-espace des polynômes trigonométriques.

Somme de sous-espaces vectoriels.

Définition 1.6 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E sur K . On définit

$$F + G = \{x + y, (x, y) \in F \times G\}.$$

Propriétés 1.1 1. La somme de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E .

2. Si F est engendré par la famille des $x_i, i \in I$ et G par la famille des $y_j, j \in J$, alors $F + G$ est engendré par la réunion des deux familles.

3. Soient A et B deux parties de E . Alors :

$$\text{Vect}(A) + \text{Vect}(B) = \text{Vect}(A \cup B).$$

Exercice 1.1 Déterminer $E + F$ dans les deux cas suivants :

(1) $E = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = a + bx^2, a, b \in \mathbb{R}\}$ et $F = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = cx, c \in \mathbb{R}\}$. On donnera aussi des familles génératrices de E et F .

(2) E est un sous-espace vectoriel de F .

Exercice 1.2

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}, \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = 0\}$$

Trouver une famille génératrice de F , de G , de $F + G$. Déterminer $F + G, F \cap G$.

Définition 1.7 (Somme directe de sous-espaces vectoriels) La somme de deux sous-espaces vectoriels F et G de E est directe si tout élément de la somme se décompose de manière unique sur F et G .

La somme de p sous-espaces vectoriels F_1, \dots, F_p de E est directe si tout vecteur de $F_1 + \dots + F_p$ s'écrit de manière unique comme somme d'éléments de F_k , $1 \leq k \leq p$:

$$\forall (x_1, \dots, x_p), (y_1, \dots, y_p) \in F_1 \times \dots \times F_p, x_1 + \dots + x_p = y_1 + \dots + y_p \Rightarrow x_i = y_i \quad \forall 1 \leq i \leq p$$

ou encore

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \dots \times F_p, x_1 + \dots + x_p = 0 \Rightarrow x_i = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq p.$$

Théorème 1.3 Les sous-espaces F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$.

Théorème 1.4 Soit p sous-espaces vectoriels F_1, \dots, F_p de E . Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) $\bigoplus_{i=1}^p F_i$.

(2) Pour toute partition de $\{1, \dots, p\}$ en deux parties complémentaires I et J , on a $\bigoplus_{i \in I} F_i$, $\bigoplus_{j \in J} F_j$, et $(\bigoplus_{i \in I} F_i) \oplus (\bigoplus_{j \in J} F_j)$.

On a adopté la convention $\bigoplus_{i \in \emptyset} = \{0\}$.

Preuve. (2) implique clairement (1). Supposons (1) vrai. Il découle de la définition que $\bigoplus_{i \in I} F_i$ pour tout $I \subset \{1, \dots, p\}$. Si $\{I, J\}$ est une partition de $\{1, \dots, p\}$, soit $x \in (\bigoplus_{i \in I} F_i) \cap (\bigoplus_{j \in J} F_j)$. On peut écrire $x = \sum_{i \in I} x_i = \sum_{j \in J} x_j$, avec $x_i \in F_i$ et $x_j \in F_j$ pour tous $i \in I$ et $j \in J$. On a donc $\sum_{i \in I} x_i - \sum_{j \in J} x_j = 0 = \sum_{i \in I \cup J} 0$. Comme $\bigoplus_{i=1}^p F_i$, on en déduit que les x_i et les x_j , $i \in I$, $j \in J$ sont tous nuls, et donc $x = 0$.

Exercice 1.3 1. Les sous-espaces vectoriels F et G de l'exercice précédent sont-ils en somme directe ?

2. Dans \mathbb{R}^3 montrer que les sous-espaces vectoriels

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0, x = 0\}, \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = 0\}$$

sont en somme directe.

Exercice 1.4 1. Donner trois façons d'écrire $\mathbb{R}_2[X]$ comme somme directe de 2 sous-espaces vectoriels non triviaux.

2. Donner six façons d'écrire $\mathbb{R}_3[X]$ comme somme directe de 3 sous-espaces vectoriels non triviaux.

3. Donner dix façons d'écrire $\mathbb{R}_3[X]$ comme somme directe de 2 sous-espaces vectoriels non triviaux.

Définition 1.8 (Espaces supplémentaires) Les sous-espaces F et G de E sont supplémentaires si $E = F \oplus G$.

Par l'axiome du choix, tout sous-espace vectoriel a un supplémentaire. Mais il n'est pas unique si le sous espace est strict.

Exemple 1.5 1. Représenter \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 à l'aide de sous-espaces supplémentaires.

2. $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$.

3. $E \times F = E \times \{0\} \oplus \{0\} \times F$.

4. Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace de toutes les fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Soit \mathcal{F}_a le sous-espace des fonctions nulles au point a , et \mathcal{F}_C le sous-espace des fonctions constantes. Montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{F}_a \oplus \mathcal{F}_C$.

Exercice 1.5 Les sous-espaces vectoriels

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0, x = 0\}, \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = 0\}$$

sont-ils supplémentaires ?

Exercice 1.6 – Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

1- On considère les sous-espaces vectoriels suivants de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: $U = \text{Vect}(1, \cos 2x, \cos 4x)$, $V = \text{Vect}(1, \cos^2 x)$ et $W = \text{Vect}(\cos^4 x)$. Montrer que $U = V \oplus W$.

2- Soit $P = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ paire}\}$ et $I = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ impaire}\}$. Montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = P \oplus I$.

Exercice 1.7 – Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P'(1) = 0\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid \deg P \leq 1\}$.

1- Montrer que $\mathbb{R}_3[X] = F \oplus G$.

2- Donner une méthode pour trouver la décomposition de tout polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ suivant cette somme directe.

1.3 Familles libres, familles génératrices, bases

Définition 1.9 Soit $\{u_i\}_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E . Elle est dite **génératrice** si le sous-espace vectoriel engendré par les u_i est E tout entier, c'est-à-dire si tout vecteur de E est combinaison linéaire finie des u_i . Elle est dite **libre** si toute sous-famille finie $\{u_i\}_{i \in I'}$ de $\{u_i\}_{i \in I}$ est libre, i.e. il n'existe pas de combinaison linéaire des u_i , $i \in I'$, à coefficients non nuls qui soit nulle. On dit aussi que les u_i , $i \in I$, sont **linéairement indépendants**. En particulier, les vecteurs u_i sont tous non nuls.

Une famille qui n'est pas libre est dite **liée**, et ses éléments sont dits linéairement dépendants.

Remarque 1.2 Pour savoir si une famille $(u_1, \dots, u_p) \in \mathbb{R}^n$ est génératrice, on résout l'équation d'inconnue (λ_1, λ_p) , $\sum_{i=1}^p \lambda_i u_i = x$, pour tout x de \mathbb{R}^n . Si la famille n'est pas génératrice, l'équation n'a pas toujours de solution, et la CNS sur x sous laquelle il y en a fournit une représentation cartésienne de $\text{Vect}(\{u_i\})$.

Remarque 1.3 Ainsi, $\{u_i\}_{i \in I}$ est libre si et seulement si

$$\forall J \text{ finie, } J \subset I, \sum_{i \in J} \lambda_i a_i = 0 \Rightarrow \forall i \in J, \lambda_i = 0.$$

Si I est fini, et les vecteurs u_i sont tous non nuls, il revient au même de dire que les espaces vectoriels $\text{Vect}(u_i)$, $i \in I$, sont en somme directe :

$$\{u_i : i \in I\} \text{ est libre si et seulement si } \text{Vect}(\{u_i : i \in I\}) = \bigoplus_{i \in I} \text{Vect}(\{u_i\}).$$

Si $\{u_i\}_{i \in I}$ est libre, alors, pour tout vecteur de E qui est combinaison linéaire des u_i , il existe une unique famille de coefficients $\{\lambda_i\}_{i \in I}$ telle que $x = \sum_{i \in I} \lambda_i u_i$. Cette famille permet de définir l'application qui à un vecteur de $\text{Vect}(\{u_i : i \in I\})$ associe ses coordonnées dans la famille $\{u_i\}_{i \in I}$. C'est une bijection de $\text{Vect}(\{u_i : i \in I\})$ sur \mathbb{K}^I .

Exemple 1.6 1. Dans \mathbb{R}^2 les vecteurs $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une famille libre.

2. Dans \mathbb{R}^3 les vecteurs $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une famille libre. Les vecteurs

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ forment une famille liée.}$$

3. Dans $\mathbb{R}^2[X]$ les polynômes 1 et x forment une famille libre, les polynômes 1, x , $2x + 3$ forment une famille liée.

Théorème 1.5 Une famille est liée si et seulement si un de ses éléments est combinaison linéaire finie des autres.

Définition 1.10 On appelle base de E toute famille libre et génératrice de vecteurs de E .

Théorème 1.6 *Si \mathcal{B} est une base de E , alors tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de \mathcal{B} . Si \mathcal{B} est finie et $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_p\}$, alors*

$$E = \bigoplus_{i=1}^p \text{Vect}(\{u_i\}).$$

Ainsi, une fois qu'on s'est donné une base de E , un vecteur est entièrement déterminé par la donnée de ses coordonnées.

Exemple 1.7 $\{1, X, \dots, X^n\}$ forme une base de $\mathbb{R}^n[X]$. Qu'en est-il de $\{1, (X - a_1), (X - a_1)(X - a_2), \dots, (X - a_1) \cdots (X - a_n)\}$. Même question pour $\mathbb{R}[X]$.