Chapitre 4

Matrices. Résolution de systèmes linéaires

K désigne $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

4.1 Matrices, opérations sur les matrices

Définition 4.1 *Soit $n \in \mathbb{N}_+$. Un vecteur* colonne *(resp.* ligne *à n composantes (ou coefficients) dans K est un tableau $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ (resp. $X = (x_1, \ldots, x_n)$). L'ensemble des vecteurs colonnes à n composantes se note $M_{n,1}(K)$, ou simplement $M_{n,1}$. L'ensemble des vecteurs lignes à n composantes se note $M_{1,n}(K)$, ou simplement $M_{1,n}$; c'est ensemble n'est autre que K^n, et $M_{n,1}$ est clairement muni d'une structure d'espace vectoriel qui le rend isomorphe à K^n. (Notons que $M_{1,1}$ n'est autre que K).*

Définition 4.2 *Soit $n, p \in \mathbb{N}_+$. Une matrice $n \times p$ à coefficients dans K est un tableau à n lignes et p colonnes*

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} \ldots A_{1j} \ldots A_{1,p} \\ \vdots \\ A_{i1} \ldots A_{ij} \ldots A_{i,p} \\ \vdots \\ A_{n1} \ldots A_{nj} \ldots A_{n,p} \end{pmatrix} = (A_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}.$$

On note $M_{n,p}(K)$, ou simplement $M_{n,p}$ l'ensemble des matrices $n \times p$. Si $n = p$, on écrit $M_n(K)$ ou M_n.

Exemple 4.1 *Un vecteur colonne (resp. ligne) est donc est une matrice colonne (resp. ligne), i.e. à une colonne (resp. ligne).*
On notera $C_j(A)$ la j-ième colonne de A et $L_i(A)$ la i-ième ligne de A.
Dans M_n, sont particulièrement importants l'ensemble des matrices diagonales $D_n(K) = \{A \in M_n(K) : A_{i,j} = 0 \text{ si } i \neq j\}$, l'ensemble des matrices triangulaires $T_n(K) = \{A \in M_n(K) : A_{i,j} = 0 \text{ si } i > j\} \cup \{A \in M_n(K) : A_{i,j} = 0 \text{ si } i < j\}$, l'ensemble des matrices symétriques $S_n(K) = \{A \in M_n(K) : A_{i,j} = A_{i,j}\ \forall\ i,j\}$, l'ensemble des matrices antisymétriques $S_n(K) = \{A \in M_n(K) : A_{i,j} = -A_{i,j}\ \forall\ i,j\}$, les matrices de permutation, la matrice identité.

Proposition 4.1 *L'ensemble $M_{n,p}(K)$ est naturellement muni de l'addition interne : $A + B = (A_{ij} + B_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et de la multiplication externe par les scalaires de K : $\lambda \cdot A = \lambda A = (\lambda A_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$, qui en font un K-espace vectoriel de dimension np.*

Définition 4.3 *Soit $n \geq 1$. Pour $1 \leq i,j \leq n$ on définit $E_{i,j} = (\delta_{k,i}\delta_{l,j})_{\substack{1\leq k\leq n\\1\leq l\leq n}}$. Exemple : $n = 3$, $E_{2,3} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, $E_{3,1} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$.*

En écrivant $A = \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} A_{ij}E_{i,j}$, on voit que $(E_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ est une base (la base canonique) de $M_{n,p}$.

Définition 4.4 *La transposée de $A \in M_{n,p}$ est la matrice de $M_{p,n}$ égale à $(A_{j,i})$ et notée ${}^tA$.*

Proposition 4.2 *L'application $A \in M_{n,p} \mapsto {}^tA \in M_{p,n}$ est linéaire. Si $n = p$ c'est une involution : c'est la symétrie par rapport aux matrices symétriques et parallèlement aux matrices antisymétriques.*

Définition 4.5 (Multiplication d'une matrice ligne par une matrice colonne) *Soit $A \in M_{1,n}$ et $B \in M_{n,1}$. On note AB l'élément de K définit par*

$$AB = \sum_{i=1}^{n} A_{1i}B_{i1}$$

Définition 4.6 *Soit $A \in M_{n,p}$ et $B \in M_{p,q}$. On note AB la matrice de $M_{p,q}$ définie par*

$$AB_{i,j} = L_i(A)C_j(B)$$

Exercice 4.1 *Si $n = p$ on a $AX = X$ pour tout $X \in M_{n,1}$ si et seulement si $A = I_n$, la matrice identité, i.e. celle ayant des 1 sur sa diagonale et des 0 partout ailleurs.*

Exercice 4.2 *Soit E_i le vecteur ligne $(\delta_{i',i})_{1\leq i\leq n}$. Alors $E_iA = A_i$.*

Exercice 4.3 *$D_n(K)$ est stable par multiplication, ainsi que l'ensemble des matrices triangulaires supérieures et celui des des matrices triangulaires inférieures. La matrice identité I_n est l'élément neutre de la multiplication dans $M_n(K)$.*

Proposition 4.3 *Soit $A \in M_{m,n}$, $B \in M_{n,p}$ et $C \in M_{p,q}$. On a*

1. *$(AB)C = A(BC)$.*
2. *Si $C \in M_{n,p}$, $A(B + C) = AB + AC$.*
3. *Si $A \in M_{n,p}$, $(A + B)C = AC + BC$.*
4. *${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.*

Remarque 4.1 *En général, si $A, B \in M_n$, on n'a pas $AB = BA$. Exemple : $A = \begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$.*

4.2 Homomorphisme associé à une matrice

Définition 4.7 *Soit A une matrice de $M_{n.p}(K)$, on note f_A l'application de K^p dans K^n envoyant X sur AX.*

Proposition 4.4 *L'application f_A est un homomorphisme.*

Proposition 4.5 *Si A est dans $M_{n.p}(K)$ et B est dans $M_{p,q}(K)$ alors on a la formule*

$$f_{AB} = f_A \circ f_B$$

Par ailleurs, si $I_n \in M_n(K)$ est la matrice identité, on a $f_{I_n} = id_{K^n}$

Définition 4.8 *Une matrice $A \in M_n(K)$ est inversible s'il existe $B \in M_n(K)$ telle que $AB = BA = I_n$.*

Proposition 4.6 *Une matrice A de $M_n(K)$ est inversible si et seulement si l'homomorphisme f_A est bijectif.*

Démonstration Si A est inversible alors f_B est la bijection réciproque de f_A par la proposition précédente. Inversement si f_A est bijectif, son inverse est un homomorphisme u et on verra dans le chapitre suivant qu'on peut associer à u une matrice B telle que $f_B = u$. On a donc $AB = BA = I_n$. ■

Théorème 4.1 *Pour que A soit inversible, il suffit qu'il existe une matrice B telle que $AB = I_n$. Une telle matrice est unique. On l'appelle inverse de A et on la note A^{-1}.*

Preuve : Pour voir que $BA = I_n$, on transcrit d'abord l'égalité $AB = I_n$ en $f_A \circ f_B = Id$, qui implique $f_B \circ f_A = Id$. En effet, pour tout Y de la forme $f_B(X)$, $f_A \circ f_B(X) = f_A(Y) = X$ implique $f_B \circ f_A(Y) = f_B(X) = Y$. Or, $f_A \circ f_B = Id$, f_B est injective, donc c'est un isomorphisme, et $Im(f_B) = M_{n,1}$, de sorte que $f_B \circ f_A(Y) = Y$ pour tout Y dans $M_{n,1}$. Donc $f_{BA} = Id$ et l'on en déduit que $BA = I_n$. Alors, si $AC = I_n$ pour une autre matrice C, on a $BAC = B$ donc $C = B$.

Exercice 4.4 *Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer AB. En déduire que $AB = AC \not\Rightarrow B = C$ en général.*

Exercice 4.5 *Pour tout $A \in M_n$ inversible, ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$.*

Exercice 4.6 *Un produit quelconque de matrices carrées inversibles est inversible.*

Exercice 4.7 *A quelle CNS une matrice diagonale est-elle inversible ?*

4.3 Opérations élémentaires sur les matrices

On formalise ici de façon matricielle les opérations usuelles auxquelles on procède pour résoudre un système linéaire.
Rappel :

Définition 4.9 *Soit $n \geq 1$. Pour $1 \leq i, j \leq n$ on définit $E_{i,j} = (\delta_{k,i}\delta_{l,j})_{\substack{1\leq k\leq n \\ 1\leq l\leq n}}$. Exemple : $n = 3$, $E_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{3,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.*

Définition 4.10 (Matrices élémentaires) *Soit $n \geq 1$.*

1. *Une matrice de dilatation est une matrice $D_i(a)$ de la forme $I + (a-1)E_{i,i}$, avec $a \in K^*$ et $1 \leq i \leq n$.*
   Exemple : $n = 3$, $D_1(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D_2(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D_3(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.
2. *Une matrice de transvection est une matrice de la forme $T_{i,j}(\lambda) = I + \lambda E_{i,j}$, avec $\lambda \in K$ et $i \neq j$.*

Proposition 4.7 *On a ${}^tD_i(a) = D_i(a)$ et ${}^tT_{i,j}(\lambda) = T_{j,i}(\lambda)$. De plus ces matrices sont inversibles : $D_i(a)^{-1} = D_i(a^{-1})$ et $T_{i,j}(\lambda)^{-1} = T_{i,j}(-\lambda)$. Donc, un produit de matrices élémentaires est une matrice inversible. On verra que la réciproque est vraie.*

Proposition 4.8 *Soit $A \in M_{n,p}(K)$.*

1. *Multiplier la colonne j de A par a, c'est multiplier A à droite par $D_j(a) \in M_p(K)$.*
2. *Multiplier la ligne i de A par a, c'est multiplier A à gauche par $D_i(a) \in M_n(K)$.*

Proposition 4.9 *Soit $A \in M_{n,p}(K)$.*

1. *Ajouter à la j-ième colonne de A $\lambda\times$ la i-ème, c'est multiplier A à droite par $T_{i,j}(\lambda) \in M_p(K)$.*
2. *Ajouter à la i-ième ligne de A $\lambda\times$ la j-ème, c'est multiplier A à gauche par $T_{i,j}(\lambda) \in M_n(K)$.*

Exercice 4.8 *Calculer* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} T_{1,2}(\lambda)$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} T_{2,1}(\lambda)$, $T_{1,2}(\lambda)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $T_{2,1}(\lambda)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Exercice 4.9 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$. *Calculer* $AT_{1,3}(1)T_{3,1}(-1)T_{1,3}(1)D_1(-1)$.

Proposition 4.10
1. *Pour échanger les colonnes i et j, on muliplie successivement à droite par $T_{i,j}(1)$, $T_{j,i}(-1)$, $T_{i,j}(1)$ et $D_i(-1)$.*
2. *Pour échanger les lignes i et j, on muliplie successivement à gauche par $T_{i,j}(1)$, $T_{j,i}(-1)$, $T_{i,j}(1)$ et $D_j(-1)$.*

Remarque 4.2 *On passe d'un cas à l'autre par transposition.*

4.4 Résolution d'un système linéaire. Calcul du rang

On se donne une matrice $A \in M_{n,p}(K)$, $B \in M_{n,1} = K^n$, et on cherche les solutions $X \in M_{p,1} = K^p$ de l'équation $f_A(X) = AX = B$, i.e. on cherche à résoudre le système d'équations à n lignes et p inconnues

$$\begin{cases} A_{1,1}x_1 + A_{1,2}x_2 + \cdots + A_{1,p}x_p = b_1, \\ \vdots \\ A_{n,1}x_1 + A_{n,2}x_2 + \cdots + A_{n,p}x_p = b_n \end{cases}.$$

On notera S l'ensemble des solutions.
Si $B = 0$, cela revient à déterminer $Ker(f_A)$, et par conséquent on obtient $\dim Ker(A)$ et $rg(f_A)$, c'est à dire le rang de la famille de vecteurs A^j, $1 \le j \le p$.

On peut commencer par discuter qualitativement cette résolution.
Si f_A est surjective, ce qui nécessite $p \ge n$, il y aura toujours une solution, sinon, l'ensemble des solutions peut être vide. Cette solution sera unique si et seulement si $Ker(f_A) = \{0\}$. Donc il y a toujours une et une seule solution si et seulement si $n = p$ et A est inversible.
Le cas le plus trivial de non surjectivité est le cas $A = 0$. Alors, ou bien $B = 0$ et $S = K^p$, ou bien $B \neq 0$ et $S = \emptyset$.
D'une façon général, si $S \neq \emptyset$, on a

$$S = X_0 + Ker(f_A),$$

où X_0 est un élément quelconque de S.
On va utiliser les opérations élémentaires pour mettre le système sous forme *échelonnée* en travaillant sur les lignes. Cela suffit pour résoudre le système.

Définition 4.11 *On dit qu'une matrice $U \in M_{n,p}(K)$ est de la forme échelonnée réduite si*
1. *chaque ligne est nulle ou commence par un 1 ;*
2. *si une ligne est nulle, toute les suivantes le sont ;*
3. *si sur la ligne i le premier coefficient non nul est en position j, alors si la ligne A_{i+1} est non nulle son premier coefficient non nul est en position $\ge j+1$. Il s'ensuit que le premier coefficient non nul de A_i est en position $\ge i$.*

Remarque 4.3 *Si $n = p$, une matrice échelonnée est triangulaire supérieure.*

Théorème 4.2 *Soit $A \in M_{n,p}(K)$.*

1. *Il existe une suite finie de matrices élémentaires, $Q^{(1)}, \ldots, Q^{(k)}$, telle que $U = Q^{(k)}Q^{(k-1)} \cdots Q^{(1)}A$ soit échelonnée réduite.*
2. *Le rang de A est égal au nombre de lignes non nulles de U, et c'est aussi le nombre de colonnes libres de U. C'est aussi le rang de U.*
3. *La dimension du noyau de f_A est égale à $p - rg(A)$.*
4. *Si $n = p$, A est inversible si et seulement si les coefficients diagonaux de U sont tous égaux à 1.*

Admettons ce résultat et voyons comment résoudre le système. Comme le produit $Q^{(k)}Q^{(k-1)} \cdots Q^{(1)}$ est inversible, on a

$$AX = B \iff UX = Q^{(k)}Q^{(k-1)} \cdots Q^{(1)}B.$$

On obtient $Ker(f_A)$ en résolvant $UX = 0$. L'équation $UX = Q^{(k)}Q^{(k-1)} \cdots Q^{(1)}B$ a au moins une solution si et seulement si la i-ème coordonnée de $Q^{(k)}Q^{(k-1)} \cdots Q^{(1)}B$ est nulle quand la i-ème ligne de U est nulle.

Preuve du Théorème 4.2 : Le cas $n = 1$ est clair.
Pour $n \geq 2$, on raisonne par récurrence sur $p \geq 1$. Supposons que $p = 1$. Si $A = 0$, on a fini, A est échelonnée (et ou bien $B = 0$ et $S = K^p$ ou bien $S = \emptyset$).
Si $A \neq 0$, on considère l'indice j_0 de la première colonne non nulle. Sans perte de généralité on supposera ici que $j_0 = 1$. Soit i_0 le plus petit indice tel que $A_{i_0,1} \neq 0$. On échange les lignes i_0 et 1 en multipliant à gauche par $K^{(1)} = D_{i_0}(-1)T_{i_0,1}(1)T_{1,i_0}(-1)T_{i_0,1}(1)$. On obtient $U = K^{(1)}A$. On rend le coefficient $U_{1,1}$ égal à 1 en multipliant à gauche par $D_1(1/U_{1,1})$. On pose $U := D_1(1/U_{1,1})U = D_1(1/U_{1,1})K^{(1)}A$.
Puis, on élimine le premier coefficient de chaque ligne $i \geq 2$ de U en multipliant à gauche par $T_{2,1}(-U_{2,1}) \cdots T_{2,1}(-U_{n,1})$: $U := T_{2,1}(-U_{2,1}) \cdots T_{2,1}(-U_{n,1})$. On appelle $\widetilde{Q}^1$ la matrice produit de toutes les multiplications élémentaires effectuées.

On a bien $U = \widetilde{Q}^{(1)}A$ échelonné : $U = \widetilde{Q}^{(1)}A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, et $\widetilde{Q}^{(1)}$ est produit de matrices élémentaires.

Supposons le résultat vrai pour $p - 1$ avec $p \geq 1$. Soit $A \in M_{n,p}(K)$. Si $A^1 \neq 0$, alors, on utilise la série de transformations précédente, et $\widetilde{Q}^{(1)}A$ est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & A' \end{pmatrix}$, où 0 est ici le vecteur nul de $M_{n-1,1}(K)$ et $A' =\in M_{n-1,p-1}$. Si $n - 1 = 1$, on a terminé. Sinon, par hypothèse de récurrence on dispose de $Q^{(2)}, \ldots, Q^{(k)}$, matrices élémentaires dans $M_{n-1,n-1}(K)$ avec $k - 1 \leq p - 1$ telles que $\widetilde{Q}^{(k)}\widetilde{Q}^{(k-1)} \cdots \widetilde{Q}^{(2)}A'$ soit échelonnée. Alors, un calcul permet de voir que si l'on pose $Q^{(i)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \widetilde{Q}^{(i)} \end{pmatrix}$ pour $i \geq 2$, on a bien $U = Q^{(k)}Q^{(k-1)} \cdots Q^{(1)}A$ échelonnée et les $Q^{(i)}$ sont élémentaires.
Si la première colonne de A est nulle, on désigne par r le nombre des premières collonnes nulles. On écrit $A = (0A')$ avec ici 0 égal à la matrice nulle de $M_{n,r}(K)$ et $A \in M_{n,p-r}(K)$. Les matrices élémentaires $Q^{(1)}, \ldots, Q^{(k)}$ telles que $U' = Q^{(k)}Q^{(k-1)} \cdots Q^{(1)}A'$ soit échelonnée sont telles que $U = Q^{(k)}Q^{(k-1)} \cdots Q^{(1)}A = (0, U')$ est échelonnée.

Remarque 4.4 CALCUL PRATIQUE *Concrètement, on construit le produit $P = Q^{(k)}Q^{(k-1)} \cdots Q^{(1)}$ en faisant parallèlement les mêmes multiplications élémentaires sur un vecteur arbitraire B, puisque $UX = Q^{(k)}Q^{(k-1)} \cdots Q^{(1)}B = PB = f_P(B)$.*

On n'a pas besoin de faire apparaître les matrices élémentaires, on manipule seulement les lignes.

Exercice 4.10 *Déterminer le rang de A et le noyau de f_A avec* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Résoudre $AX = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4.5 Inversion d'une matrice

On se donne une matrice $A \in M_n(K)$. On se demande si A est inversible, et si oui on souhaite calculer A^{-1}, c'est à dire inverser A.

Etape 1. On construit d'abord $U = Q^{(k)}Q^{(k-1)} \cdots Q^{(1)}A$ échelonnée. Si aucun coefficient diagonal n'est nul, f_A est un automorphisme (cf Théorème 4.2). Parallèlement, on stocke le produit $Q^{(k)}Q^{(k-1)} \cdots Q^{(1)}$ en faisant subir à la matrice I_n les mêmes opérations qu'à A pour obtenir U.

L'inversion de A, qui revient à résoudre l'équation $AX = Y$, a donc pour première étape de se ramener à résoudre $UX = PY$, avec $P = Q^{(k)}Q^{(k-1)} \cdots Q^{(1)}$.

Etape 2. On résout $UX = Z$ (c'est facile puisque le système est échelonné), qui donne $X = U^{-1}Z$. Cela revient à opérer sur les lignes à nouveau mais en partant du dernier pivot en bas à droite de la diagonale pour rendre nul les coefficients de la dernierès colonne au dessus de la diagonale, puis en faisant de même avec l'avant dernier pivot et l'avant dernière colonne, et ce jusqu'à la première. Il ne reste plus que I_n. Parallèlement on poursuit les mêmes opérations sur $P = Q^{(k)}Q^{(k-1)} \cdots Q^{(1)}$, et on a donc stocké le produit $Q^{(\ell)} \cdot Q^{(k+1)}Q^{(k)}Q^{(k-1)} \cdots Q^{(1)}$. On a ainsi utilisé un nouveau produit $Q^{(\ell)} \cdot Q^{(k+1)}$ de matrice élémentaires telles que $Q^{(\ell)} \cdot Q^{(k+1)}U = I_n$, i.e. $Q^{(\ell)} \cdot Q^{(k+1)} = U^{-1}$, ou encore $Q^{(\ell)} \cdot Q^{(k+1)}Q^{(k)}Q^{(k-1)} \cdots Q^{(1)}A = I_n$, i.e. $Q^{(\ell)} \cdot Q^{(k+1)}Q^{(k)}Q^{(k-1)} \cdots Q^{(1)} = A^{-1}$. Donc on a l'inverse de A, et les relations $X = U^{-1}PY$ et $A^{-1} = U^{-1}P$.

Remarque 4.5 *On pourrait choisir de manipuler les colonnes*

Exercice 4.11 *Appliquer l'algorithme précédent au calcul de l'inverse d'une matrice* 2×2.

Exercice 4.12 *Soit* $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. *Montrer que A est inversible et calculer son inverse.*