ENS, Département de Mathématiques et Applications
Année universitaire 2018-2019, second semestre

Topologie algébrique, partiel, 2 Avril 2019

Problème 1. On note $S^1 \subset \mathbb{C}$ l'espace des nombres complexes de module 1 muni de sa topologie usuelle. Soit $T^n = (S^1)^n$ le tore de dimension n. On note $u = (1, 1, \ldots, 1)$.

1. Construire un isomorphisme $\mathbb{Z}^n \to \pi_1(T^n, u)$ (on ne demande pas de vérifier que c'est un isomorphisme). Donner des formules explicites de lacets de T^n dont les classes forment une base de $\pi_1(T^n, u)$.

2. Soit $x = (-1, \ldots, -1)$. On note U le complémentaire de x dans T^n. Calculer $\pi_1(U, u)$ dans le cas $n = 1$ et dans le cas $n \geq 3$.

3. Maintenant $n = 2$, U est défini comme dans la question précente. On note W le sous-espace de T^2 constitué des paires (z_1, z_2) telles que $z_1 = 1$ ou $z_2 = 1$. Montrer que l'inclusion $W \to U$ est une équivalence d'homotopie.

4. En déduire que le groupe $\pi_1(U, u)$ est isomorphe au groupe libre à 2-générateurs.

5. Calculer le morphisme $\pi_1(i) : \pi_1(W) \to \pi_1(T^2)$ où $i : W \to T^2$ est l'inclusion.

Solution. *1. On dispose de n projections $T^n \to S^1$. On a donc n morphismes de groupes $\pi_1(T^n, u) \to \pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$. Ces n-morphismes s'assemblent en un isomorphisme $\pi_1(T^n, u) \cong \mathbb{Z}^n$ (c'est un cas particulier d'un problème vu en TD : le groupe fondamental d'un produit est le produit des groupes fondamentaux). Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note $\gamma_i : [0, 1] \to T^n$ le lacet dont toute les coordonnées valent 1 à part la $i$ème qui vaut $t \mapsto e^{2i\pi t}$. Les classes des lacets γ_i forment une base de $\pi_1(T^n, u)$.*

2. Dans le cas $n = 1$, on peut construire un homéomorphisme entre l'intervalle $]-\pi, \pi[$ et U donné par l'application $\theta \mapsto e^{i\theta}$. Il est donc équivalent de calculer le groupe fondamental de $]-\pi, \pi[$ basé en 0. Par un résultat du cours, ce groupe est le groupe trivial.

Dans le cas $n \geq 3$, on considère l'ouvert V de T^n dont les points sont les n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$ dont toutes les coordonnées sont distinctes de $-i$. L'ouvert V est homéomorphe à $]-\pi/2, 3\pi/2[^n$ par un homéomorphisme similaire à celui du paragraphe précédent. Par ailleurs, les ouverts V et U forment un recouvrement de T^n. On peut appliquer le théorème de van Kampen à ce recouvrement, on a $\pi_1(V, u) \cong \{1\}$ et $\pi_1(V \cap U, u) \cong \{1\}$. Le premier isomorphisme vient de l'homéomorphisme $V \cong]-\pi/2, 3\pi/2[^n$, le second vient de la suite d'homéomorphismes

$$V \cap U = V - x \cong]-\pi/2, 3\pi/2[^n - (\pi/2, \ldots, \pi/2) \cong \mathbb{R}^n - (0, \ldots, 0)$$

Par ailleurs, on a vue en cours que l'inclusion $S^{n-1} \to \mathbb{R}^n - (0,\dots,0)$ est une équivalence d'homotopie. Enfin, on a $\pi_1(S^{n-1}) = \{1\}$ si $n \geq 3$.

Le théorème de van Kampen nous permet alors d'affirmer que l'inclusion $U \to T^n$ induit un isomorphisme au niveau des groupes fondamentaux. On a donc $\pi_1(U,u) \cong \mathbb{Z}^n$.

3. *Considérones le carré $[0,2\pi]^2$ quotienté par la relation d'équivalence qui identifie $(t,0)$ à $(t,2\pi)$ et $(0,t)$ à $(2\pi,t)$. On a un homéomorphisme de ce quotient vers T^2 qui envoie (a,b) sur (e^{ia},e^{ib}). Vus à travers cette identification, l'ouvert U est le complémentaire du point $x = (\pi,\pi)$ et l'espace W est donné par l'image des côtés du carré. On peut donc construire une application continue $r : U \to W$ en envoyant un point y sur l'unique point $r(y)$ situé sur les côté du carré et tel que y appartienne au segment $[x, r(y)]$ (faire un dessin). Si on note $j : W \to U$ l'inclusion, on a de manière évidente $r \circ j = id_W$. Par ailleurs, on peut construire une homotopie pointée $h : U \times [0,1] \to U$ entre $j \circ r$ et id_U par la formule*

$$h(u,t) = tu + (1-t)r(u)$$

4. *L'espace W est homéomorphe à un bouquet de deux cercles. Il s'agit alors d'une application du théorème de van Kampen : le groupe fondamental de W est la somme amalgamée de deux copies de $\mathbb{Z}$.*

5. *Les lacets γ_1 et γ_2 définis dans la question 1 vivent dans W. Le théorème de van Kampen nous affirme que ces deux élément engendrent $\pi_1(W)$. Il est donc suffisant de calculer $\pi_1(i)$ sur les deux générateurs $[\gamma_1]$ et $[\gamma_2]$ de $\pi_1(W)$. Mais on a par définition, $\pi_1(i)[\gamma_1] = [\gamma_1]$ et $\pi_1(i)[\gamma_2] = [\gamma_2]$.*

Problème 2. Dans ce problème, on défini T^n, le tore de dimension n comme le quotient de $\mathbb{R}^n$ par le sous-groupe $\mathbb{Z}^n$ [l'espace obtenu est homéomorphe à l'espace T^n du problème précédent mais on ne demande pas de le vérifier]. On le munit de la topologie quotient. On choisit pour point base de T^n la classe du point $u = (0,\dots,0)$. Le but de ce problème est de calculer l'ensemble $[T^n,T^n]$ des morphismes de T^n vers lui-même dans la catégorie d'homotopie des espaces topologiques.

1. Il existe une opération d'addition sur les applications continues $T^n \to T^n$ donnée par la formule $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$. Montrer que cette opération passe au quotient et induit une structure de groupe abélien sur $[T^n,T^n]$.

2. Pour u et v deux éléments de $[T^n,T^n]$, on note $u.v$ la classe d'homotopie de la composée $f \circ g$ où $f : T^n \to T^n$ et $g : T^n \to T^n$ sont des applications continues $T^n \to T^n$ dans la classe u et v respectivement [Remarque : On a vu en cours que le résultat est indépendant du choix de f et g]. Montrer que cette opération et la structure de groupe abélien de la question précédente fournit une structure d'anneau sur $[T^n,T^n]$.

3. On note $[T^n, T^n]_*$ l'ensemble des classes d'homotopies pointées d'applications pointées de T^n vers lui-même. Cet ensemble est également muni d'une structure d'anneau définie de manière analogue aux questions (1) et (2) [On ne demande pas de le vérifier]. Montrer que l'application évidente

$$[T^n, T^n]_* \to [T^n, T^n]$$

est un isomorphisme d'anneau.

4. Soit $M_n(\mathbb{Z})$ l'anneau des matrices carrées $n \times n$ à coefficients entiers. On note $e : [T^n, T^n]_* \to M_n(\mathbb{Z})$ l'application qui envoie la classe d'homotopie d'une application $f : T^n \to T^n$ vers $\pi_1(f)$ (où on identifie l'anneau des endomorphismes de $\pi_1(T^n)$ avec l'anneau $M_n(\mathbb{Z})$ grâce à l'isomorphisme de la question (1) du problème 1). Montrer que e est un morphisme d'anneau.

5. Soit $f : T^n \to T^n$ une application pointée telle que $e[f]$ soit la matrice nulle. Montrer que f est homotope à une application constante. [On pourra commencer par montrer que f se relève en une application continue $\tilde{f} : T^n \to \mathbb{R}^n$.]

6. Soit A un élément de $M_n(\mathbb{Z})$, vérifier que l'application $x \mapsto Ax$ de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^n$ passe au quotient et induit une application pointée $T^n \to T^n$. On note t_A cette application du tore dans lui-même.

7. Montrer que $e[t_A] = A$. En déduire que e est un isomorphisme d'anneau.

Solution. *1. Il s'agit de montrer que si f est homotope à f', alors, pour tout $g : T^n \to T^n$, $f + g$ est homotope à $f' + g$. Soit $h : T^n \times [0, 1] \to T^n$ une homotopie entre f et f'. Alors considérons $k : T^n \times [0, 1] \to T^n$ donnée par la formule*

$$k(x, t) = h(x, t) + g(x)$$

Il est évident que k est une homotopie entre $f + g$ et $f' + g$.

2. Soient f, g et g' trois applications continues de T^n vers T^n. On a une égalité

$$(g + g') \circ f = g \circ f + g' \circ f$$

qui montre la distributivité à gauche de l'addition par rapport à la multiplication. Pour montrer la distributivité à droite, il faut montrer que $f \circ (g + g')$ est homotope à $f \circ g + f \circ g'$. C'est évident si $f : T^n \to T^n$ est un morphisme de groupe abélien. Les questions suivantes montrent que toute application continue $T^n \to T^n$ est homotope à un morphisme de groupe abélien (et on peut vérifier qu'on n'utilise jamais la structure d'anneau mais seulement la structure de groupe abélien sur $[T^n, T^n]$). Une preuve directe de la distributivité à droite est possible mais nettement plus difficile qu'anticipé par l'auteur du sujet.

3. *Notons ϕ cette application. Il est clair que ϕ est compatible à la structure d'anneau. On va construire un inverse à ϕ. Pour $f : T^n \to T^n$, on note f_* l'application pointée de T^n vers T^n donnée par $f_*(x) = f(x) - f(u)$. On observe que si $h : T^n \times [0,1] \to T^n$ est une homotopie entre f et f', alors h_* donnée par la formule*

$$h_*(x,t) = h(x,t) - h(u,t)$$

est une homotopie entre f_* et f'_*. On peut donc construire $\psi : [T^n, T^n] \to [T^n, T^n]_*$ en envoyant la classe de f sur la classe de f_*. Il est évident que $\psi \circ \phi = id_{[T^n,T^n]_*}$. Par ailleurs, pour $f : T^n \to T^n$, on peut construire une homotopie k entre f et f_* par la formule

$$k(x,t) = f(x) - \gamma(t)$$

où $\gamma(t)$ est n'importe quel chemin de T^n reliant u à $f(u)$. L'existence de cette homotopie montre que $\phi \circ \psi = id_{[T^n,T^n]}$.

4. *Soient f et g deux application pointées de T^n vers T^n. Il nous faut montrer que $e([f+g]) = e[f] + e[g]$ et que $e[f \circ g] = e[f]e[g]$. Il est suffisant de montrer que ces deux formules sont vraies après multiplication à droite par les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{Z}^n$. Par la question 1 du problème 1, ces vecteurs sont donnés par les classes d'homotopies des lacets γ_i. On est donc ramené à montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $(f+g) \circ \gamma_i$ est homotope à $f \circ \gamma_i + g \circ \gamma_i$ et que $f \circ (g \circ \gamma_i)$ est homotope à $(f \circ g) \circ \gamma_i$, mais à chaque fois, on a même une égalité.*

5. *L'application quotient $q : \mathbb{R}^n \to T^n$ est un revêtement. En effet, pour un point x de $\mathbb{R}^n$, on peut choisir une boule ouverte U autour de x de rayon plus petit que $1/3$. L'application q est alors un homéomorphisme de U sur $q(U)$ et l'image inverse de $q(U)$ par q est l'ensemble des translatés à coordonnées entière de U qui est homéomorphe au produit $U \times \mathbb{Z}^n$. L'ouvert $q(U)$ est alors un voisinage ouvert de $q(x)$ dans T^n au-dessus duquel q est un revêtement trivial.*

   On peut alors utiliser un résultat du cours qui affirme que (sous l'hypothèse, ici vérifiée, que $\mathbb{R}^n$ et T^n sont localement connexes par arcs) f admet un relèvement à $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $\pi_1(f)$ a son image contenue dans l'image de $\pi_1(q)$. Si $e[f]$ est la matrice nulle, l'image de $\pi_1(f)$ est le sous-groupe trivial qui est bien contenu dans l'image de $\pi_1(q)$. Sous ces hypothèses, on peut donc trouver $\tilde{f} : T^n \to \mathbb{R}^n$ tel que $q \circ \tilde{f} = f$. On dispose d'une homotopie $h : T^n \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ entre $\tilde{f}$ et l'application constante de valeur 0 donnée par

$$h(x,t) = t\tilde{f}(x)$$

   On a donc une homotopie $q \circ h$ entre f et l'application constante de valeur u qui est bien ce qu'on voulait démontrer.

6. *La multiplication par A envoie bien tout vecteur de $\mathbb{Z}^n$ sur un vecteur de $\mathbb{Z}^n$. Elle passe donc au quotient.*

7. *On observe qu'on a l'égalité $t_A + t_B = t_{A+B}$. Puisque e est un morphisme d'anneau, c'est en particulier un morphisme de groupe abélien et on peut donc se ramener au cas d'une matrice élémentaire $A = E_{i,j}$. On doit donc montrer $e[t_{E_{i,j}}] = E_{i,j}$. Là encore on peut se restreindre à le vérifier sur les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{Z}^n$ qui sont donnés par les classes des lacets γ_i de la question 1 du problème 1. Un calcul élémentaire donne l'équation $t_{E_{i,j}} \circ \gamma_j = \gamma_i$ et $t_{E_{i,j}} \circ \gamma_k = c_u$ pour $k \neq j$ (où c_u est l'application constante de valeur u). Cela montre bien que $e[t_{E_{i,j}}] = E_{i,j}$.*

   Pour résumer, on a montré dans la question 4 que e est un morphisme d'anneau, dans la question 5 que e est injective et dans la question 7 que e est surjective. On a donc bien montré que e est un isomorphisme d'anneau.

Problème 3. Soit X un espace topologique connexe par arcs muni d'une action à gauche libre d'un groupe discret G. On note $x \mapsto gx$ l'action de $g \in G$ sur $x \in X$. On muni le quotient $G\backslash X$ de la topologie quotient et on suppose que l'application quotient

$$q : X \to G\backslash X$$

est un revêtement (on a vu en TD que c'était par exemple le cas si X est localement compact et l'action est propre). On choisit un point base x dans X et on note $b = q(x)$. Les hypothèses sur l'action de G impliquent que G agit librement et transitivement sur la fibre $X_b = q^{-1}(b)$ (qui n'est autre que l'orbite de x). On a donc une bijection $G \to X_b$ qui envoie g sur $g^{-1}x$. On note $j : X_b \to G$ l'inverse de cette bijection.

1. On construit une application $m : \pi_1(G\backslash X, b) \to G$ en envoyant la classe $[\gamma]$ d'un lacet γ de $G\backslash X$ sur $j([\gamma].x)$ où le point désigne l'action de monodromie de $\pi(G\backslash X, b)$ sur X_b. Montrer que cette application est un morphisme de groupe.

2. Montrer qu'on a une suite exacte courte

$$1 \to \pi_1(X, x) \xrightarrow{\pi_1(q)} \pi_1(G\backslash X, b) \xrightarrow{m} G \to 1$$

   (On demande aussi de prouver l'injectivité du premier morphisme, même si ce fait a été vu en cours.)

Solution. *1. Soit γ un lacet de $G\backslash X$ basé en b et g un élément de G. On va commencer par montrer la formule*

$$g[\gamma].x = [\gamma].gx$$

Soit $\tilde{\gamma}$ l'unique chemin de X qui relève γ et tel que $\tilde{\gamma}(0) = x$. On a alors $g[\gamma].x = g\tilde{\gamma}(1)$. Par ailleurs, le chemin $g\tilde{\gamma}$ est l'unique relèvement de γ prenant la valeur gx en 0, on a donc $[\gamma].gx = g\tilde{\gamma}(1)$.

Nous pouvons maintenant montrer que m est un morphisme de groupe. Soient γ et γ' deux lacets de $G\backslash X$ basés en b. En utilisant la formule qu'on vient de démontrer et la définition de m, on trouve

$$[\gamma{*}\gamma'].x = [\gamma].([\gamma'].x) = [\gamma].(m[\gamma']^{-1}x) = m[\gamma']^{-1}([\gamma].x) = m[\gamma']^{-1}m[\gamma]^{-1}x$$

ce qui est précisément équivalent à dire que $m[\gamma * \gamma'] = m[\gamma]m[\gamma']$.

2. Soit γ un lacet de X tel que $[\gamma]$ soit dans le noyau de $\pi_1(q)$. Cela signifie qu'il existe un homotopie à extrémités fixes h entre $q \circ \gamma$ et c_b. Puisque l'application q est un revêtement, on sait d'après le cours qu'elle possède la propriété de relèvement unique par rapport à l'inclusion $j : \{0\} \times I \to I^2$. On observe qu'on a un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} \{0\} \times I \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "j"'] & X \arrow[d, "q"] \\ I^2 \arrow[r, "h"'] & G\backslash X \end{tikzcd}$$

La propriété de relèvement unique nous fournit donc une homotopie $\tilde{h} : I^2 \to X$ entre γ et un relèvement de c_b qu'on vérifie facilement être c_x ce qui montre que $[\gamma]$ est l'élément neutre de $\pi_1(X, x)$.

On a vu dans le cours que l'image de $\pi_1(q)$ est le stabilisateur du point x pour l'action de monodromie de $\pi_1(G\backslash X, b)$ sur x. En d'autre terme, $[\gamma]$ est dans l'image de $\pi_1(q)$ si et seulement si $[\gamma].x = x$ ce qui est équivalent à dire que $m[\gamma]$ est l'élément neutre de G. Cela montre l'exactitute de la suite en $\pi_1(G\backslash X, b)$.

Montrons la surjectivité de m. Soit g un élément de G. Soit γ un chemin de X reliant x à gx (un tel chemin existe puisque X est connexe par arcs). Le chemin $q \circ \gamma$ est un lacet de $G\backslash X$ basé en b et on a $[q \circ \gamma].x = gx$ puisque γ est l'unique relèvement de $q \circ \gamma$ prenant la valeur x en 0. On a donc par définition $m[q \circ \gamma] = g^{-1}$. Ce qui montre que g^{-1} est dans l'image de m. Ce raisonnement vaut pour tout $g \in G$ donc m est surjective.