ENS, Département de Mathématiques et Applications
Année universitaire 2019-2020, second semestre

Topologie algébrique, Devoir maison

Problème 1. Soit X un espace topologique connexe par arcs muni d'une action à gauche libre d'un groupe discret G. On note $x \mapsto gx$ l'action de $g \in G$ sur $x \in X$. On munit le quotient $G\backslash X$ de la topologie quotient et on suppose que l'application quotient

$$q : X \to G\backslash X$$

est un revêtement (on a vu en TD que c'était par exemple le cas si X est localement compact et l'action est propre). On choisit un point base x dans X et on note $b = q(x)$. Les hypothèses sur l'action de G impliquent que G agit librement et transitivement sur la fibre $X_b = q^{-1}(b)$ (qui n'est autre que l'orbite de x). On a donc une bijection $G \to X_b$ qui envoie g sur $g^{-1}x$. On note $j : X_b \to G$ l'inverse de cette bijection.

1. On construit une application $m : \pi_1(G\backslash X, b) \to G$ en envoyant la classe $[\gamma]$ d'un lacet γ de $G\backslash X$ sur $j([\gamma].x)$ où le point désigne l'action de monodromie de $\pi_1(G\backslash X, b)$ sur X_b. Montrer que cette application est un morphisme de groupe.

2. Montrer qu'on a une suite exacte courte

$$1 \to \pi_1(X, x) \xrightarrow{\pi_1(q)} \pi_1(G\backslash X, b) \xrightarrow{m} G \to 1$$

3. En déduire que X est simplement connexe si et seulement si m est un isomorphisme de groupe.

4. Soient p et q deux nombres premiers entre eux, soit ζ une racine primitive p-ième de l'unité. On identifie la sphère S^3 avec les paires (z_1, z_2) dans $\mathbb{C}^2$ telles que $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$. L'espace lenticulaire $L(p, q)$ est le quotient de S^3 par l'action de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ donnée par

$$\overline{n}.(z_1, z_2) = (\zeta^n z_1, \zeta^{nq} z_2), \text{ avec } \overline{n} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

Calculer le groupe fondamental de $L(p, q)$.

Solution. 1. Soit γ un lacet de $G\backslash X$ basé en b et g un élément de G. On va commencer par montrer la formule

$$g[\gamma].x = [\gamma].gx$$

Soit $\tilde{\gamma}$ l'unique chemin de X qui relève γ et tel que $\tilde{\gamma}(0) = x$. On a alors $g[\gamma].x = g\tilde{\gamma}(1)$. Par ailleurs, le chemin $g\tilde{\gamma}$ est l'unique relèvement de γ prenant la valeur gx en 0, on a donc $[\gamma].gx = g\tilde{\gamma}(1)$.

Nous pouvons maintenant montrer que m est un morphisme de groupe. Soient γ et γ' deux lacets de $G\backslash X$ basés en b. En utilisant la formule qu'on vient de démontrer et la définition de m, on trouve

$$[\gamma*\gamma'].x = [\gamma].([\gamma'].x) = [\gamma].(m[\gamma']^{-1}x) = m[\gamma']^{-1}([\gamma].x) = m[\gamma']^{-1}m[\gamma]^{-1}x$$

ce qui est précisément équivalent à dire que $m[\gamma * \gamma'] = m[\gamma]m[\gamma']$.

2. Soit γ un lacet de X tel que $[\gamma]$ soit dans le noyau de $\pi_1(q)$. Cela signifie qu'il existe un homotopie à extrémités fixes h entre $q \circ \gamma$ et c_b. Puisque l'application q est un revêtement, on sait d'après le cours qu'elle possède la propriété de relèvement unique par rapport à l'inclusion $j : \{0\} \times I \to I^2$. On observe qu'on a un carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \times I \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "j"'] & X \arrow[d, "q"] \\
I^2 \arrow[r, "h"'] & G\backslash X
\end{tikzcd}$$

La propriété de relèvement unique nous fournit donc une homotopie $\tilde{h} : I^2 \to X$ entre γ et un relèvement de c_b qu'on vérifie facilement être c_x ce qui montre que $[\gamma]$ est l'élément neutre de $\pi_1(X, x)$.

On a vu dans le cours que l'image de $\pi_1(q)$ est le stabilisateur du point x pour l'action de monodromie de $\pi_1(G\backslash X, b)$ sur x. En d'autre terme, $[\gamma]$ est dans l'image de $\pi_1(q)$ si et seulement si $[\gamma].x = x$ ce qui est équivalent à dire que $m[\gamma]$ est l'élément neutre de G. Cela montre l'exactitute de la suite en $\pi_1(G\backslash X, b)$.

Montrons la surjectivité de m. Soit g un élément de G. Soit γ un chemin de X reliant x à gx (un tel chemin existe puisque X est connexe par arcs). Le chemin $q\circ\gamma$ est un lacet de $G\backslash X$ basé en b et on a $[q\circ\gamma].x = gx$ puisque γ est l'unique relèvement de $q \circ \gamma$ prenant la valeur x en 0. On a donc par définition $m[q \circ \gamma] = g^{-1}$. Ce qui montre que g^{-1} est dans l'image de m. Ce raisonnement vaut pour tout $g \in G$ donc m est surjective.

3. Évident par la suite exacte.

4. On commence par observe que cette action de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est propre et libre. La propreté est évidente car le groupe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est fini. Pour montrer la liberté, supposons que

$$(\zeta^n z_1, \zeta^{nq} z_2) = (z_1, z_2)$$

puisque z_1 et z_2 ne peuvent pas tous les deux être nuls, on doit avoir $\zeta^n = 1$ ou $\zeta^{nq} = 1$ ce qui implique que n est divisible par p.

L'application quotient $S^3 \to L(p, q)$ est donc un revêtement. Puisque S^3 est simplement connexe, on déduit de la question précédente que l'application $m : \pi_1(L(p, q)) \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un isomorphisme.

Problème 2. Dans ce problème, on pourra utiliser les résultats du problème précédent. Soit B un espace topologique connexe par arc, localement simplement connexe. Le but de ce problème est de construire le revêtement universel de B. On fixe un point b_0 de B et on note G le groupe $\pi_1(B, b_0)$. On construit un espace topologique X. Un point de X est une paire $(b, [\gamma])$ où b est un point de B et $[\gamma]$ est une classe d'homotopie à extrémités fixes de chemin reliant b à b_0. On muni X d'une action à gauche de G par la formule

$$[\lambda].(b, [\gamma]) = (b, [\lambda \star \gamma])$$

On construit une topologie sur X de la manière suivante. Pour un ouvert U de B simplement connexe, et un chemin γ de B reliant un point b de U à b_0, on note U_γ l'ensemble des paires $(b', [\gamma'])$ avec $b' \in U$ et telles que $\gamma^{-1} \star \gamma'$ est homotope à extrémités fixes à un chemin entièrement contenu dans U. On munit X de la topologie la moins fine telle que tous les U_γ soient ouverts.

1. Montrer que l'action de G sur X est continue.
2. Montrer que X est connexe par arcs.
3. Montrer que, pour H un sous-groupe de G, l'application quotient

$$q_H : H \backslash X \to G \backslash X = B$$

   est un revêtement.
4. Montrer que X est simplement connexe.
5. Soit $p : Y \to B$ un revêtement de B avec Y connexe par arcs. Montrer que le revêtement p est isomorphe au revêtement q_H de la question 3 pour un certain sous-groupe H de G.

Solution.

1. Soit $[\lambda] \in G$. Il faut montrer que l'action de $[\lambda]$ sur X est continue. On constate que cette action envoie bijectivement l'ouvert $U_{\lambda^{-1} \star \gamma}$ sur l'ouvert U_γ (la bijection inverse étant donné par l'action de $[\lambda^{-1}]$). En particulier l'image réciproque de U_γ par l'action de $[\lambda]$ est un ouvert et donc cette action est continue.

2. On va montrer que tout point $x = (b, [\gamma])$ est relié par un chemin à $x_0 = (b_0, [c_{b_0}])$ où c_{b_0} est le chemin constant en b_0. On note $\gamma_{[t,1]}$ la restriction de γ à $[t, 1]$ (en faisant un changement d'échelle de temps pour que γ_t soit une application de $[0, 1]$ vers B). On peut alors considérer l'application $\alpha : [0, 1] \to X$ donnée par

$$\alpha(t) = (\gamma(t), [\gamma_{[t,1]}])$$

   On a bien $\alpha(0) = x$ et $\alpha(1) = x_0$. Il s'agit simplement de vérifier que α est continue.

   On commence par faire une remarque sur la topologie de X qui nous sera également utile pour les questions suivantes. Pour γ un chemin reliant

b à b_0, l'ouvert U_γ peut se voir comme l'ensemble des paires $(b', [\gamma \star \lambda])$ où b' est dans U et λ est n'importe quel chemin de U reliant b' à b (à homotopie près, il n'y en a qu'un). Les ouverts U_γ forment donc une base de la topologie de X. En effet l'intersection $U_\gamma \cap U'_{\gamma'}$ est ou bien vide (si $\gamma^{-1} \star \gamma'$ n'est pas homotope à un chemin de U) ou bien se recouvre par des ouverts de la forme V_β avec V simplement connexe contenu dans $U \cap U'$ et β un chemin tel que la composée $\gamma^{-1} \star \lambda$ est homotope à un chemin de U et $(\gamma')^{-1} \star \lambda$ est homotope à un chemin de U'. On peut alors vérifier que la projection $q : X \to B$ se restreint en un homéomorphisme $U_\gamma \to U$. En effet, une base de la topologie de U_γ est donnée par les ouverts V_β avec $\beta^{-1} \star \gamma$ homotope à un chemin de U et une base de la topologie de U est donnée par les ouverts simplement connexes V contenus dans U. L'application quotient $q : U_\gamma \to U$ envoie bijectivement la première base sur la seconde.

Il est maintenant facile de vérifier que α est continu. Soit t_0 un point de $[0,1]$, soit U un ouvert simplement connexe de B contenant $\gamma(t_0)$. Soit $\epsilon > 0$ tel que $\gamma([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]) \subset U$. Alors, on a $\alpha([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]) \subset U_{\gamma_{[t_0,1]}}$. Par la remarque précédente, la restriction de α à l'intervalle $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ est donc continue. Puisque ce raisonnement vaut pour tout t_0, on a bien montré la continuité de α.

3. L'espace $H \backslash X$ peut se décrire comme l'ensemble des paires $(b, H[\gamma])$ où $H[\gamma]$ décrit la classe d'équivalence d'un chemin γ de B reliant b à b_0 à homotopie et concaténation par un chemin de H près. Précisément $H[\gamma] = H[\gamma']$ si il existe un lacet λ dont la classe d'homotopie est dans H et tel que $\lambda \star \gamma$ est homotope à extrémités fixes à γ'. Comme dans la question précédente on peut construire une base de la topologie de $H \backslash X$ dont les ouverts sont les $U_{H[\gamma]}$ où U est un ouvert simplement connexe de B, γ est un chemin reliant un point de U à b_0. L'ouvert $U_{H[\gamma]}$ est alors défini comme l'ensemble des paires $(b, H[\delta])$ telles que, pour un certain lacet η en b_0 avec $[\eta]$ dans H, on ait $\gamma^{-1} \star \eta \star \delta$ homotope à extrémités fixes à un chemin contenu dans U.

   On constate alors que, pour U un ouvert simplement connexe de B, l'image inverse $q_H^{-1}(U)$ est donnée par $\bigsqcup U_{H[\gamma]}$, Ici l'union disjointe est indexée par les classes d'homotopies, modulo multiplication à gauche par un élément de H, de chemins reliant un point fixé u de U à b_0. La restriction de q_H à chaque ouvert est bien un homéomorphisme (comme dans la question précédente). Au final, on a donc bien un revêtement.

4. La question précédente dans le cas particulier du groupe trivial montre que le morphisme quotient $X \to B$ est un revêtement. Par le problème précent, il suffit donc de montrer que le morphisme

$$m : \pi_1(B) \to G$$

   est un isomorphisme. Soit $\lambda : [0,1] \to B$ un lacet basé en b_0. Soit $(b_0, [\gamma])$

un point de X au-dessus de b_0. Alors, on vérifie que le chemin

$$\tilde{\lambda}(t) = (\lambda(t), [\lambda_{[0,t]} \star \gamma])$$

est le relèvement de λ premant la valeur $(b_0, [\gamma])$ en 0 ($\lambda_{[0,t]}$ est la restriction de λ à l'intervalle $[0, t]$, la preuve de la continuité de $\tilde{\lambda}$ est analogue à la preuve de la continuité de α dans la question 2). Cela montre que l'action de monodromie de $[\lambda]$ envoie $(b_0, [\gamma])$ sur $(b_0, [\lambda \star \gamma])$. Cela implique que le morphisme m est un isomorphisme.

5. Le cours nous donne une bijection entre les classes d'isomorphismes de revêtements connexes par arcs de B et les sous-groupes de G à conjugaison près. Cette bijection envoie un revêtement $q : Y \to B$ sur le stabilisateur pour l'action de monodromie d'un point quelconque de la fibre au-dessus de b_0 (à conjugaison près, ce groupe est indépendant du point choisi). Calculons donc le groupe correspondant au revêtement q_H. Considérons le point $y = (b_0, H[c_{b_0}])$ comme point dans la fibre $q_H^{-1}(b_0)$. Soit λ un lacet de B basé en b_0. On a vu à la question précédente que le lacet

$$\tilde{\lambda}(t) = (\lambda(t), [\lambda_{[0,t]}])$$

était l'unique relèvement de λ à X prenant la valeur $(b_0, [c_{b_0}])$ en 0. On en déduit que $q \circ \tilde{\lambda}$ est l'unique relèvement de λ à $H\backslash X$ prenant la valeur y en 0 (où $q : X \to H\backslash X$ est l'application quotient). Au final l'action de $[\lambda]$ sur y est $(b_0, H[\lambda])$. On constate ainsi que le stabilisateur de y est exactement le groupe H. Le revêtement q_H correspond donc à la classe de conjugaison de H par la bijection rappelée ci-dessus. Tout revêtement connexe par arc de B est donc isomorphe à q_H pour un certain H.

Problème 3. On considère les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$D = \{(0, 0, z), z \in \mathbb{R}\}$$

$$D' = \{(2, 0, z), z \in \mathbb{R}\}$$

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = 0, x^2 + y^2 = 1\}$$

Calculer le groupe fondamental des espaces topologiques suivants. [On remarquera que ces espaces sont connexes par arcs, il est donc inutile de spécifier le point base. On demande une rédaction précise mais succinte : on pourra en particulier se permettre d'affirmer qu'une application est une équivalence d'homotopie sans donner une formule pour les homotopies lorsque celles-ci sont claires.]

1. L'espace $U = \mathbb{R}^3 - D$.
2. L'espace $V = \mathbb{R}^3 - (D \cup D')$.
3. L'espace $W = \mathbb{R}^3 - C$.

4. L'espace $X = \mathbb{R}^3 - (C \cup D)$. [On peut par exemple chercher un tore T dans $\mathbb{R}^3$ tel que $T \subset X$ et tel que l'inclusion $T \to X$ est une équivalence d'homotopie.]

5. L'espace $Y = \mathbb{R}^3 - (C \cup D')$.

Solution. 1. On considère le sous-espaces U_0 de U consitué des triplets (x, y, z) de U avec $z = 0$. L'espace U_0 est homéomorphe à $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ et l'inclusion $U_0 \to U$ est une équivalence d'homotopie d'inverse la projection $U \to U_0$. On en déduit que le groupe fondamental de U est isomorphe à celui de U_0 et est donc isomorphe à $\mathbb{Z}$.

2. Le même raisonnement montrer que le groupe fondamental de V est isomorphe à celui de $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0), (2, 0)\}$ et est donc isomorphe au groupe libre à deux générateurs.

3. On définit
$$W_+ = \{(x, y, z) \in W, x \geq -\frac{1}{2}\}$$
$$W_- = \{(x, y, z) \in W, x \leq \frac{1}{2}\}$$
Ona donc $W = W_+ \cup W_-$. Les espaces W_+ et W_- sont homéomorphes à U et l'intersection $W_+ \cap W_-$ est homéomorphe à V. Par ailleurs l'inclusion $W_+ \cap W_- \to W_+$ induit le morphisme $F_2 \to \mathbb{Z}$ qui envoie les deux générateurs de F_2 sur le générateur de $\mathbb{Z}$. Il en va de même pour l'inclusion $W_+ \cap W_- \to W_+$. Le théorème de Van Kampen nous permet de conclure que le groupe fondamental de W est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

4. En coordonnées cylindriques (R, θ, z), on considère le tore d'équations $z^2 + (R - 1)^2 = 1/4$. L'inclusion $T \to X$ est un rétracte par déformation. Puisque la situation est indépendante de la coordonnées θ, on peut fixer θ et se placer dans le demi-plan $(R, z), R > 0$. Il s'agit alors de montrer que l'inclusion du cercle de centre $(1, 0)$ et de rayon $1/2$ dans le complémentaire du point $(1, 0)$ est un rétracte par déformation du complémentaire du point $(1, 0)$. Ce dernier fait est facile à voir, un inverse se construit en envoyant chaque point sur le point du cercle qui lui est le plus proche.

5. On peut considérer les ouverts $Y_+ = \{(x, y, z) \in Y, x > 1\}$ et $Y_- = \{(x, y, z) \in Y, x < 2\}$, alors $Y = Y_+ \cup Y_-$ et $Y_+ \cap Y_-$ est contractile. Par ailleurs Y_+ est homéomorphe à U et Y_- est homémorphe à W. Par Van Kampen le groupe fondamental de Y est isomorphe à F_2.