

RAPPELS DE THÉORIES DES CATÉGORIES

GEOFFROY HOREL

1. GÉNÉRALITÉS

Définition 1. Une catégorie C est la donnée suivante.

- Un ensemble noté $\text{Ob}(C)$ dont les éléments sont appelés les objets de C .
- Un ensemble $\text{Hom}_C(x, y)$ pour toute paire (x, y) d'objets de C dont les éléments sont appelés les morphismes de x vers y .
- Un élément id_x dans $\text{Hom}_C(x, x)$ pour tout objet x de C appelé l'identité de x .
- Des applications de compositions

$$\begin{aligned}\text{Hom}_C(y, z) \times \text{Hom}_C(x, y) &\rightarrow \text{Hom}_C(x, z) \\ (f, g) &\mapsto f \circ g\end{aligned}$$

pour tout triplet (x, y, z) d'objets de C .

Ces données doivent par ailleurs satisfaire les axiomes suivants.

- Pour toute paire d'objets (x, y) et tout élément f de $\text{Hom}_C(x, y)$, on a

$$f \circ \text{id}_x = f \text{ et } \text{id}_y \circ f = f.$$

- Pour tout quadruplet (x, y, z, t) d'objets de C , et pour tout élément (f, g, h) de $\text{Hom}_C(z, t) \times \text{Hom}_C(y, z) \times \text{Hom}_C(x, y)$, on a l'égalité

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

Notation 2. On utilisera souvent des flèches pour symboliser les morphismes d'une catégorie. Ainsi la phrase "soit $f : x \rightarrow y$ " est totalement équivalente à "soit f un élément de $\text{Hom}_C(x, y)$ ". Il faut d'ailleurs noter que dans de nombreux textes le mot "flèche" est utilisé à la place du mot "morphisme".

Remarque 3. Cette remarque est un point un peu technique qui peut être ignoré sans nuire à la compréhension de la théorie. Il se trouve que de nombreux objets que l'on souhaiterait appeler catégories ne rentrent pas tout à fait dans le cadre de cette définition car leurs objets ne forment pas un ensemble. Il est par exemple bien connu qu'il ne peut pas exister d'ensemble des ensembles (paradoxe du barbier), cependant, on souhaiterait pouvoir parler de la catégorie des ensembles dont les objets sont les ensembles et les morphismes sont les applications entre ensembles. Ce problème peut être résolu en utilisant la théorie des univers de Grothendieck. En bref, on suppose qu'on dispose de deux modèles pour la théorie des ensembles, l'un dont les éléments sont appelés les petits ensembles et l'autre, contenant le premier, dont les éléments sont appelés les grands ensembles. On suppose aussi qu'il existe un grand ensemble des petits ensembles. On peut alors parler de la catégorie des ensembles. Ses objets forment un grand ensemble et ses morphismes sont des petits ensembles. Cet exemple nous incite à poser la définition suivante.

Définition 4. Une catégorie est dite localement petite si pour toute paire d'objets (x, y) , l'ensemble des morphismes $\text{Hom}_C(x, y)$ est un petit ensemble. Elle est dite petite si elle est localement petite et si son ensemble d'objets est petit.

Remarque 5. Dans ce cours, sauf mention du contraire, une catégorie est par défaut localement petite. De même un ensemble est par défaut petit.

Exemple 6. Nous donnons quelques exemples de catégories.

- La catégorie vide notée \emptyset est l'unique catégorie dont l'ensemble des objets est vide.
- À un ensemble partiellement ordonné (E, \leq) , on peut associer une catégorie notée E dont l'ensemble des objets est E et dont l'ensemble des morphismes est donné par la formule suivante

$$\text{Hom}_E(x, y) = * \text{ si } x \leq y$$

$$\text{Hom}_E(x, y) = \emptyset \text{ sinon.}$$

On se convaincra facilement qu'il existe un unique choix pour la composition.

- Étant donné un groupe G ou plus généralement un monoïde, on dispose d'une catégorie $\mathcal{B}G$ avec un unique objet $*$ et avec $\text{Hom}_{\mathcal{B}G}(*, *) = G$. La composition est donnée par la multiplication du groupe. La donnée d'une catégorie avec un unique objet est exactement équivalente à la donnée d'un monoïde.
- Pour n un entier naturel, on note $[n]$ l'ensemble totalement ordonné $\{0, 1, \dots, n\}$. On note Δ la catégorie dont les objets sont les entiers naturels et telle que $\text{Hom}_{\Delta}([n], [m])$ est l'ensemble des applications croissantes de $[n]$ dans $[m]$.
- On a déjà parlé de la catégorie **Ens** dont les objets sont les (petits) ensembles et les morphismes sont les applications entre ensembles.
- La catégorie **Grp** est la catégorie dont les objets sont les groupes et dont les morphismes sont les morphismes de groupes.
- On peut de même définir la catégorie **Ab** des groupes abéliens, **Mod $_k$** des modules sur un anneau k , **Ann** des anneaux, etc.
- La catégorie **Top** est la catégorie dont les objets sont les espaces topologiques et les morphismes sont les applications continues.
- La catégorie **Diff** dont les objets sont les variétés lisses et les morphismes sont les applications C^∞ .

Définition 7. Soit C , une catégorie. Sa catégorie opposée notée C^{op} a les mêmes objets que C mais les morphismes sont donnés par l'équation

$$\text{Hom}_C(x, y) = \text{Hom}_{C^{\text{op}}}(y, x).$$

Si $g \in \text{Hom}_C(x, y)$ et $f \in \text{Hom}_C(y, z)$, on définit $g \circ f$ dans C^{op} comme la composée $g \circ f \in \text{Hom}_C(x, z) = \text{Hom}_{C^{\text{op}}}(z, x)$.

Définition 8. Soient C et D deux catégories. La catégorie produit $C \times D$ est la catégorie dont l'ensemble des objets est $\text{Ob}(C) \times \text{Ob}(D)$ et dont les ensembles de morphismes sont donnés par la formule

$$\text{Hom}_{C \times D}((x, y), (x', y')) = \text{Hom}_C(x, x') \times \text{Hom}_D(y, y')$$

Définition 9. Soit C une catégorie, x, y, z et t quatre objets de C et $f : x \rightarrow y$, $g : y \rightarrow t$, $h : x \rightarrow z$, $i : z \rightarrow t$ quatre morphismes. On dit que le carré

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{f} & y \\ h \downarrow & & \downarrow g \\ z & \xrightarrow{i} & t \end{array}$$

est commutatif si on a l'égalité $g \circ f = i \circ h$.

Remarque 10. On peut également parler de triangle commutatif, de pentagone commutatif, etc. Cette notion est simplement une façon visuelle de représenter une équation.

2. FONCTEURS

Les catégories sont elle-mêmes des structures algébriques et il existe donc une notion de morphismes entre catégories.

Définition 11. Soit C et D deux catégories, un foncteur entre C et D est la donné d'une application $F : \text{Ob}(C) \rightarrow \text{Ob}(D)$ et d'applications également notées F de $\text{Hom}_C(x, y)$ vers $\text{Hom}_D(F(x), F(y))$ pour toute paire (x, y) d'objets de C . Cette donnée devant vérifier les axiomes suivants

- On a $F(\text{id}_x) = \text{id}_{F(x)}$ pour tout objet x de C .
- On a l'équation $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ pour toute paires (f, g) de morphismes de C dont la composition est bien définie.

Définition 12. Soient C, D et E des catégories et $F : C \rightarrow D$ et $G : D \rightarrow E$ des foncteurs. Alors, on peut définir un foncteur $G \circ F$ par les formules $G \circ F(x) = G(F(x))$ pour x un objet de C et $G \circ F(f) = G(F(f))$ pour f un morphisme de C .

On dispose aussi d'un foncteur identité $\text{id}_C : C \rightarrow C$ pour toute catégorie. Il est donc possible de définir la catégorie **Cat** des petites catégories.

Exemple 13. Nous donnons quelques exemples de foncteurs.

- Un foncteur $F : \mathcal{B}G \rightarrow \mathbf{Ens}$ est la donnée d'un ensemble muni d'une action du groupe G . En effet, si on note X l'ensemble $F(*)$ (où $*$ est l'unique objet de $\mathcal{B}G$), on constate que F induit un morphisme de monoïde

$$G \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Ens}}(X, X)$$

qui est exactement équivalent à la donnée d'une action de G sur X .

- De même un foncteur $\mathcal{B}G \rightarrow \mathbf{Ab}$ est la donnée d'un groupe abélien muni d'une action additive de G , un foncteur de $\mathcal{B}G$ vers \mathbf{Mod}_k est une k -représentation de G , etc.
- Soit \mathbb{N} l'ensemble des entiers naturels munis de la relation d'ordre \leq . Un foncteur $\mathbb{N} \rightarrow \mathbf{Ens}$ est la donnée d'une collection d'ensembles X_n indexée par les entiers naturels et d'applications $f_n : X_n \rightarrow X_{n+1}$.
- On dispose d'un foncteur $U : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Ens}$ qui envoie un groupe sur son ensemble sous-jacent. On appelle souvent U le "foncteur oublié". On peut définir des foncteurs similaires $\mathbf{Mod}_k \rightarrow \mathbf{Ens}$, $\mathbf{Ann} \rightarrow \mathbf{Ens}$.
- On dispose d'un foncteur $CC : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Ens}$ qui envoie un espace topologique X sur l'ensemble des ses composantes connexes.
- Étant donnée une catégorie C , on dispose d'un foncteur $C^{\text{op}} \times C \rightarrow \mathbf{Ens}$ qui envoie une paire (x, y) d'objets de C sur $\text{Hom}_C(x, y)$.

Exemple 14. Un foncteur $\Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ens}$ est appelé un ensemble simplicial. En raison de l'importance des ces objets en théorie de l'homotopie, nous allons essayer d'en donner une description plus explicite. La donnée d'un foncteur $X : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ens}$ est en particulier la donnée d'une famille d'ensemble $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ indexée par les entiers naturels. Il y a ensuite des applications $X_n \rightarrow X_m$ pour chaque applications croissante $[m] \rightarrow [n]$. On va donner des noms particuliers à certaines de ces applications. Pour tout $i \in \{0, \dots, n+1\}$, il existe une unique application injective croissante de $[n]$ vers $[n+1]$ dont l'image ne contient pas i . On appelle i -ème face de X et on note $d_i : X_{n+1} \rightarrow X_n$ l'application induite par la structure d'ensemble simplicial. De même étant donné $j \in \{0, \dots, n\}$, il existe une unique application surjective croissante $[n+1] \rightarrow [n]$ qui envoie j et $j+1$ sur le même élément. On appelle j -ème dégénérescence de X et on note $s_j : X_n \rightarrow X_{n+1}$ l'application induite par la structure d'ensemble simplicial. Il n'est pas difficile de montrer que tout application croissante $[n] \rightarrow [p]$ peut s'écrire comme une composition des applications des deux types précédents. La structure d'ensemble simplicial est donc déterminée par les ensembles X_n et les applications de faces et de dégénérescences entre eux. Cependant la structure de la catégorie Δ impose certaines relations entre ces applications. Il n'est pas difficile de se

convaincre que les relations suivantes doivent être satisfaites.

$$\begin{aligned} d_i \circ d_j &= d_{j-1} \circ d_i \text{ si } i < j, \\ s_i \circ s_j &= s_j \circ s_{i-1} \text{ si } i > j, \\ d_i \circ s_j &= s_{j-1} \circ d_i \text{ si } i < j, \\ d_i \circ s_j &= \text{id si } i = j \text{ ou } i = j + 1, \\ d_i \circ s_j &= s_j \circ d_{i-1} \text{ si } i > j + 1. \end{aligned}$$

Ce qui est plus difficile est de montrer que ces identités suffisent, de sorte qu'on peut définir un ensemble simplicial comme une collection $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ munie d'application de faces et de dégénérescences satisfaisant les identités ci-dessus. Ce résultat ne sera cependant pas utilisé dans ce cours.

On peut de même définir un groupe simplicial, un groupe abélien simplicial, un k -module simplicial, etc. comme un foncteur de Δ^{op} vers \mathbf{Grp} , \mathbf{Ab} , \mathbf{Mod}_k , etc. Dans chaque cas, il s'agit d'une suite d'objets $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans la catégorie considérée, muni de morphismes de faces et de dégénérescences satisfaisant les identités ci-dessus.

Exemple 15. Il existe un foncteur “groupe libre” $G : \mathbf{Ens} \rightarrow \mathbf{Grp}$. Pour S un ensemble, on appelle mot simplifié de S un mot fini w dans l'alphabet $\{s, s \in S\} \sqcup \{s^{-1}, s \in S\}$ tel que pour tout s dans S , les mots ss^{-1} et $s^{-1}s$ ne soient pas des sous mots de w . On note $G(S)$ l'ensemble des mots simplifiés de S . Il existe une structure de groupe sur $G(S)$ dont l'élément neutre est le mot vide et le produit est donné par la concaténation des mots avec la règle que si un sous-mot de la forme ss^{-1} ou $s^{-1}s$ apparaît, on peut le supprimer. On a une injection ensembliste évidente $S \rightarrow G(S)$ et on peut vérifier que pour tout ensemble S et tout groupe H , un morphisme de groupe $G(S) \rightarrow H$ est complètement déterminé par sa restriction à $S \subset G(S)$. Il n'y a par ailleurs aucune condition sur ce que peut être cette restriction de sorte que l'application de restriction

$$\text{Hom}_{\mathbf{Grp}}(G(S), H) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Ens}}(S, H)$$

est une bijection.

Exemple 16. De manière analogue, on peut construire un foncteur “groupe abélien libre” $\mathbf{Ens} \rightarrow \mathbf{Ab}$. Pour S , un ensemble, on note $\mathbb{Z}\langle S \rangle$ la valeur de ce foncteur. En tant qu'ensemble, il est l'ensemble des sommes formelles $\sum_{s \in S} a_s \cdot s$ où les coefficients a_s sont des entiers presque tous nuls. Il existe une structure de groupe abélien évidente sur $\mathbb{Z}\langle S \rangle$. Par ailleurs l'injection $S \rightarrow \mathbb{Z}\langle S \rangle$ envoyant s sur $1 \cdot s$ induit une application de restriction

$$\text{Hom}_{\mathbf{Ab}}(\mathbb{Z}\langle S \rangle, M) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Ens}}(S, M)$$

qui est une bijection.

On peut aussi construire exactement de la même façon un foncteur R -module libre pour R un anneau commutatif. Il suffit de demander à ce que les coefficients a_s de la construction précédente soient des éléments de R au lieu d'être des nombres entiers. On notera $R\langle S \rangle$ ce foncteur.

Définition 17. Soient C et D deux catégories. Un foncteur $F : C \rightarrow D$ est dit pleinement fidèle si pour toute paire (x, y) d'objets de C , le foncteur F induit une bijection

$$\text{Hom}_C(x, y) \rightarrow \text{Hom}_D(F(x), F(y)).$$

Définition 18. Un morphisme $f : x \rightarrow y$ dans une catégorie C est un isomorphisme s'il existe un morphisme $g : y \rightarrow x$ tel que $f \circ g = \text{id}_y$ et $g \circ f = \text{id}_x$. On dit dans ce cas que g est l'inverse de f . Deux objets x et y sont dits isomorphes s'il existe un isomorphisme entre eux.

Remarque 19. Un argument standard d'algèbre montre que l'inverse d'un morphisme est unique lorsqu'il existe.

Remarque 20. Dans certaines catégories les isomorphismes portent un nom spécial, par exemple dans **Ens**, on les appelle bijections, dans **Top** on les appelle homéomorphismes dans **Diff** on les appelle difféomorphismes.

Proposition 21. Soient $F : C \rightarrow D$ un foncteur entre deux catégories. Si f est un isomorphisme de C , alors $F(f)$ est un isomorphisme de D . De même si deux objets x et y de C sont isomorphes, $F(x)$ et $F(y)$ sont isomorphes.

Proof. La seconde affirmation découle de la première. Soit $f : x \rightarrow y$ un morphisme. Par définition, il existe g tel que $f \circ g = \text{id}_y$ et $g \circ f = \text{id}_x$. Les axiomes satisfaits par le foncteur F impliquent immédiatement que $F(g)$ est l'inverse de $F(f)$. \square

Par la proposition précédente, disposer d'un foncteur d'une catégorie "compliquée" vers une catégorie plus simple est souvent un moyen efficace de prouver que deux objets ne sont pas isomorphes, en effet, il suffit de vérifier que leurs images par le foncteur ne sont pas isomorphes.

Exemple 22. Deux espaces topologiques qui n'ont pas le même nombre de composante connexes ne peuvent pas être homéomorphes. Deux groupes ne peuvent pas être isomorphes s'il n'existe pas de bijections entre leurs ensembles sous-jacents, etc.

La réciproque de la proposition ci-dessus n'est pas vraie en général. On retiendra néanmoins la proposition suivante.

Proposition 23. Soit $F : C \rightarrow D$ un foncteur pleinement fidèle. Soit $f : x \rightarrow y$ un morphisme de C . Alors f est un isomorphisme si et seulement si $F(f)$ est un isomorphisme.

Proof. Soit $f : x \rightarrow y$ un morphisme tel que $F(f)$ est un isomorphisme. Il existe donc $h : F(y) \rightarrow F(x)$ tel que $F(f) \circ h = \text{id}_{F(y)}$ et $h \circ F(f) = \text{id}_{F(x)}$. Puisque F est pleinement fidèle, on peut trouver $g : y \rightarrow x$ tel que $F(g) = h$. Par définition d'un foncteur, on a alors $F(f \circ g) = \text{id}_{F(y)}$ et $F(g \circ f) = \text{id}_{F(x)}$. Une fois encore, la propriété de pleine fidélité de F implique que $f \circ g = \text{id}_y$ et $g \circ f = \text{id}_x$. \square

3. TRANSFORMATIONS NATURELLES

Définition 24. Soient C et D deux catégories et F et G deux foncteurs de C vers D . Une transformation naturelle de F vers G est la donnée d'un morphisme $T(x) : F(x) \rightarrow G(x)$ pour tout objet x de C tel que pour tout morphisme $f : x \rightarrow y$ dans C , le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} F(x) & \xrightarrow{T(x)} & G(x) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(y) & \xrightarrow{T(y)} & G(y) \end{array}$$

Exemple 25. Donnons quelques exemples de transformations naturelles. On invite le lecteur à utiliser ses connaissances mathématiques pour produire d'autres exemples.

- Pour F n'importe quel foncteur de C vers D , on dispose de la transformation naturelle identité de F notée id_F donnée par $\text{id}_F(x) = \text{id}_{F(x)}$.
- Pour tout groupe abélien A , il existe un unique morphisme $0 \rightarrow A$ (resp. $A \rightarrow 0$). On vérifie aisément que ces morphismes définissent des transformations naturelles du foncteur constant de valeur 0 vers le foncteur identité de la catégorie des groupes abéliens (resp. du foncteur identité vers le foncteur constant).
- Reprenons le foncteur groupe libre construit plus haut. On a dit que pour tout ensemble S , il existe une application ensembliste évidente $S \rightarrow G(S)$. On peut interpréter cette application comme une transformation naturelle $\text{id}_{\mathbf{Ens}} \rightarrow U \circ G$ où $\text{id}_{\mathbf{Ens}}$ désigne le foncteur identité de la catégorie des ensembles et $U \circ G$ est la composée des foncteurs U et G (on rappelle que U désigne le foncteur oubli de la catégorie des groupes vers celle des ensembles).

- Soit V un espace vectoriel sur un corps k . Il est classique qu'on dispose d'une inclusion

$$V \rightarrow (V^*)^*$$

de V vers son bidual qui envoie v sur $\phi \mapsto \phi(v)$. On vérifie que cela définit une transformation naturelle du foncteur identité de la catégorie \mathbf{Vect}_k vers le foncteur $V \mapsto (V^*)^*$.

- Soit $U : \mathbf{Ann} \rightarrow \mathbf{Ens}$ le foncteur qui envoie un anneau sur son ensemble sous-jacent. Soit $V : \mathbf{Ann} \rightarrow \mathbf{Ens}$ le foncteur qui envoie un anneau sur l'ensemble des ses éléments inversibles. On a toujours une inclusion $A^\times \rightarrow A$ qui définit une transformation naturelle $V \rightarrow U$.
- Soit X un espace topologique. On note $CC(X)$ l'ensemble des composantes connexes de X , on dispose d'une application continue $X \rightarrow CC(X)$ (où $CC(X)$ est muni de la topologie quotient ; prendre garde au fait que ce n'est pas toujours la topologie discrète) qui envoie chaque point de X sur la composante connexe dans lequel il vit. On vérifie que cela définit une transformation naturelle du foncteur identité de \mathbf{Top} vers le foncteur $X \mapsto CC(X)$.
- etc.

Remarque 26. Nous espérons que ces exemples mettent en évidence l'intuition derrière la notion de transformation naturelle. Si on dispose de foncteurs F et G de C vers D , une transformation naturelle est un morphisme $F(x) \rightarrow G(x)$ pour tout objet x de C qui peut se définir de façon uniforme pour tous les objets (c'est à dire sans faire de choix).

Étant donnés trois foncteurs F, G et H de C vers D et des transformations naturelles T de F vers G et U de G vers H , on peut construire une transformation $U \circ T$ par la formule $U \circ T(x) = U(x) \circ T(x)$. On a par ailleurs la transformation naturelle identité pour tout foncteur F . On laisse au lecteur le soin de vérifier que l'on peut ainsi construire une catégorie dont l'ensemble des objets est l'ensemble des foncteurs de C à D et dont les morphismes sont les transformations naturelles. On note cette catégorie $\mathbf{Fon}(C, D)$.

Remarque 27. Les transformations naturelles sont des morphismes entre foncteurs, de même que les foncteurs sont des morphismes entre catégories. En langage savant cela se traduit par le fait qu'il existe une 2-catégorie des catégories. Sans entrer dans les détails, une 2-catégorie est une structure qui ressemble à une catégorie à part que les morphismes entre deux objets sont eux-même les objets d'une catégorie.

4. PRÉFAISCEAUX ET LEMME DE YONEDA

Définition 28. Soit C une petite catégorie. La catégorie des préfaisceaux sur C est la catégorie \hat{C} dont les objets sont les foncteurs $C^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ens}$ et dont les morphismes sont les transformations naturelles.

Remarque 29. On se restreint à C une petite catégorie pour s'assurer que la catégorie \hat{C} est localement petite.

Définition 30. Soit C une petite catégorie et x un objet de C . On note h_x le préfaisceau qui envoie un objet y sur l'ensemble $\text{Hom}_C(y, x)$ et un morphisme $f : u \rightarrow v$ sur l'application

$$\begin{aligned} \text{Hom}_C(v, x) &\rightarrow \text{Hom}_C(u, x) \\ g &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

On appelle h_x le préfaisceau représenté par x .

On vérifie facilement qu'il existe un foncteur $C \rightarrow \hat{C}$ qui envoie x sur h_x et $f : x \rightarrow y$ sur la transformation naturelle

$$\text{Hom}(-, x) \rightarrow \text{Hom}(-, y)$$

donnée par la postcomposition par f .

Avant de pouvoir énoncer le lemme de Yoneda, nous avons besoin de fixer une notation. Soit C une petite catégorie, x un objet de C et F un objet de \hat{C} , alors on peut construire une application

$$Y_x : \text{Hom}_{\hat{C}}(h_x, F) \rightarrow F(x)$$

qui envoie $k : h_x \rightarrow F$ une transformation naturelle sur $k(x)(\text{id}_x)$. Le lemme de Yoneda est l'énoncé suivant.

Lemmme 31. *L'application Y_x est une bijection.*

Proof. On construit une application Z_x qui va dans l'autre sens. Soit $a \in F(x)$. On définit alors $Z_x(a) : h_x \rightarrow F$ une transformation naturelle par la formule

$$\begin{aligned} Z_x(a)(u) : \text{Hom}_C(u, x) &\rightarrow F(u) \\ f &\mapsto F(f)(a) \end{aligned}$$

Il n'est pas difficile de vérifier que $Z_x(a)$ est bien une transformation naturelle. Il faut alors vérifier que $Z_x \circ Y_x$ et $Y_x \circ Z_x$ sont les application identité de $\text{Hom}_{\hat{C}}(h_x, F)$ et $F(x)$ respectivement. \square

Corollaire 32. *Le foncteur $C \rightarrow \hat{C}$ qui envoie x sur h_x est pleinement fidèle.*

Proof. Il faut montrer que pour toute paire d'objets x et y de C . l'application

$$\text{Hom}_C(x, y) \rightarrow \text{Hom}_C(h_x, h_y)$$

est une bijection. C'est exactement le lemme de Yoneda avec $F = h_y$. \square

Corollaire 33. *Si deux objets x et x' sont tels que h_x et h'_x sont isomorphes comme préfaisceaux alors, x et x' sont isomorphes dans C .*

Proof. Il suffit d'appliquer la Proposition 23. \square

On appelle ce foncteur de C dans \hat{C} le plongement de Yoneda.

Remarque 34. Ce corollaire contient en lui les résultat d'unicité d'objets construit par propriété universelle. Donnons un exemple, soient M et N deux groupes abéliens et soit $B_{M,N}$ le foncteur $\mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Ens}$ qui envoie P sur l'ensemble des applications bilinéaires de $M \times N$ vers P . Ce foncteur peut se voir comme un préfaisceau sur \mathbf{Ab}^{op} . L'existence du produit tensoriel est équivalente à l'affirmation que ce préfaisceau est isomorphes à $h_{M \otimes N}$. Le corollaire précédent affirme alors que le produit tensoriel est unique à isomorphisme près.

Dans le même ordre d'idée, on peut montrer purement catégoriquement l'isomorphisme $M \otimes N \cong N \otimes M$ sans utiliser de modèle explicite pour le produit tensoriel. Il suffit de construire un isomorphisme naturel entre les foncteurs $B_{M,N}$ et $B_{N,M}$. Soit P un groupe abélien, on dispose d'une bijection évidente

$$B_{M,N}(P) \cong B_{N,M}(P)$$

qui envoie une application bilinéaire $(m, n) \mapsto \phi(m, n)$ sur l'application bilinéaire $(n, m) \mapsto \phi(m, n)$. On vérifie facilement que cela définit bien un isomorphisme naturel.

On construirait de même l'isomorphisme d'associativité

$$(M \otimes N) \otimes P \cong M \otimes (N \otimes P)$$

5. ADJONCTIONS

Définition 35. Soient C et D deux catégories. Une adjonction est un triplet (F, G, i) où $F : C \rightarrow D$ est un foncteur $G : D \rightarrow C$ est un foncteur et i est un isomorphisme de foncteurs $C^{\text{op}} \times D \rightarrow \mathbf{Ens}$

$$i : \text{Hom}_D(F(-), -) \cong \text{Hom}_C(-, G(-))$$

On appelle alors F l'adjoint à gauche et G l'adjoint à droite.

Remarque 36. On dit souvent, que le foncteur G est l'adjoint à droite de F et que le foncteur F est l'adjoint à gauche de G . En effet comme on le verra dans la Proposition 38, un adjoint à gauche ou à droite d'un foncteur est uniquement déterminé à isomorphisme près.

Étant donné une adjonction (F, G, i) entre les catégories C et D , on dispose pour tous les objets c de C d'un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_D(F(c), F(c)) \cong \mathrm{Hom}_C(c, G(F(c)))$$

et donc en particulier d'un morphisme $c \rightarrow G(F(c))$ qui correspond à l'identité de $F(c)$ par la bijection ci-dessus. On le nomme l'unité de l'adjonction en c . Dualement, pour d un objet de D , on a une bijection

$$\mathrm{Hom}_D(F(G(d)), d) \cong \mathrm{Hom}(G(d), G(d))$$

qui nous fournit un morphisme $FG(d) \rightarrow d$. On appelle ce morphisme counité de l'adjonction en d .

Exemple 37. Voici quelques exemples d'adjonctions.

- On a déjà vu le foncteur groupe libre $G : \mathbf{Ens} \rightarrow \mathbf{Grp}$ et le foncteur oubli $U : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Ens}$. Comme on l'a observé, il existe une bijection

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}(G(S), H) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ens}}(S, H)$$

On peut vérifier que cette bijection est en fait une transformation naturelle de sorte que le foncteur G est l'adjoint à gauche de U .

- De même le foncteur groupe abélien libre $\mathbb{Z}\langle - \rangle : \mathbf{Ens} \rightarrow \mathbf{Ab}$ est l'adjoint à gauche du foncteur oubli $U : \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Ens}$.
- Fixons un anneau commutatif k et M un k -module. On dispose d'un foncteur

$$\begin{aligned} F : \mathrm{Mod}_k &\rightarrow \mathrm{Mod}_k \\ N &\mapsto N \otimes_k M \end{aligned}$$

et d'un foncteur

$$\begin{aligned} G : \mathrm{Mod}_k &\rightarrow \mathrm{Mod}_k \\ N &\mapsto \mathrm{Hom}_k(M, N) \end{aligned}$$

où $\mathrm{Hom}_k(M, N)$ désigne l'ensemble des morphismes k -linéaires de M vers N muni de sa structure évidente de k -module. On peut construire une adjonction dont l'adjoint à gauche est F et l'adjoint à droite est G . Il s'agit donc de construire un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}_k}(N \otimes_k M, P) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}_k}(N, \mathrm{Hom}_k(M, P))$$

Par la propriété universelle du produit tensoriel, un morphisme $N \otimes_k M \rightarrow P$ est la donnée d'une application bilinéaire $\phi : N \times M \rightarrow P$. À partir de ϕ , on peut construire un morphisme $N \rightarrow \mathrm{Hom}_k(M, P)$ qui envoie n sur $\phi(n, -)$. Inversement, étant donné un morphisme $g : N \rightarrow \mathrm{Hom}_k(M, P)$, on peut construire une application bilinéaire $\phi : N \otimes_k M \rightarrow P$ par la formule $\phi(n, m) = g(n)(m)$. On vérifie facilement que ces deux applications fournissent un isomorphisme naturel.

- Le foncteur $\mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Ens}$ qui envoie un espace topologique sur son ensemble sous-jacent possède un adjoint à droite et un adjoint à gauche. L'adjoint à gauche est le foncteur qui muni un ensemble de sa topologie discrète et l'adjoint à droite est le foncteur qui muni un ensemble de sa topologie grossière.

La proposition suivante affirme que si un foncteur admet un adjoint à droite, ce dernier est unique à isomorphisme près.

Proposition 38. Soit $F : C \rightarrow D$ un foncteur. S'il existe deux adjonctions (F, G, i) et (F, G', i') , alors les foncteurs G et G' sont naturellement isomorphes.

Proof. Construisons un isomorphisme j de G à G' . Pour d un objet de D , on dispose d'un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_C(-, G(d)) \cong \mathrm{Hom}_C(-, G'(d))$$

induit par les isomorphismes i et i' . Par le lemme de Yoneda, cela nous fournit un unique isomorphisme $j(d) : G(d) \rightarrow G'(d)$. Soit maintenant $f : d \rightarrow d'$ un morphisme. Considérons le diagramme commutatif suivant dans la catégorie des préfaisceaux sur C

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}_C(-, G(d)) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Hom}_D(F(-), d) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Hom}_C(-, G'(d)) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_C(-, G(d')) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Hom}_D(F(-), d') & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Hom}_C(-, G'(d')) \end{array}$$

où les isomorphismes horizontaux sont induits par i et i' et les morphismes verticaux par f . Par définition de j , les lignes horizontales correspondent par l'isomorphisme de Yoneda aux isomorphismes $j(d) : G(d) \rightarrow G'(d)$ et $j(d') : G(d') \rightarrow G'(d')$. En utilisant encore Yoneda, on en déduit l'équation $G'(f) \circ j(d) \cong j(d') \circ G(f)$ qui est exactement dire que j est un isomorphisme naturel. \square

6. LIMITES ET COLIMITES

Soit I une petite catégorie, et C une catégorie quelconque, on dispose d'un foncteur

$$\delta_I : C \rightarrow \mathrm{Fun}(I, C)$$

qui envoie l'objet x sur le foncteur $\delta_I(x)$ qui envoie tous les objets de I sur x et tous les morphismes de I sur id_x .

Définition 39. Soit $X : I \rightarrow C$ un foncteur. On dit qu'une paire (c, j) , où c est un objet c de C et $j : X \rightarrow \delta_I c$ est une transformation naturelle, est une colimite pour X si la composée

$$\mathrm{Hom}_C(c, -) \xrightarrow{\delta_I} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(I, C)}(\delta_I(c), \delta_I(-)) \xrightarrow{j} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(I, C)}(X, \delta_I(-))$$

est un isomorphisme de foncteurs.

De même on dit qu'une paire (d, j) , avec $j : \delta_I d \rightarrow X$ une transformation naturelle, est une limite pour X si la composée

$$\mathrm{Hom}_C(-, d) \xrightarrow{\delta_I} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(I, C)}(\delta_I(-), \delta_I(d)) \xrightarrow{j} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(I, C)}(\delta_I(-), X)$$

est un isomorphisme de foncteurs.

Il arrive que des foncteurs $I \rightarrow C$ ne possèdent pas de limite (resp. colimite). Cependant si une limite (resp. colimite) existe, elle est unique à isomorphisme unique près par le lemme de Yoneda. Il n'est donc pas abusif de noter $\mathrm{colim}_I X$ ou $\mathrm{lim}_I X$ pour n'importe quel choix de colimite ou de limite pour X .

Remarque 40. Les notions de colimites et de limites sont duales l'une de l'autre. Plus précisément, si $X : I \rightarrow C$ est un foncteur, on peut considérer le foncteur $X^{\mathrm{op}} : I^{\mathrm{op}} \rightarrow C^{\mathrm{op}}$. La colimite de X^{op} est la limite de X et la limite de X^{op} est la colimite de X .

Théorème 41. Soit $F : C \rightarrow D$ un adjoint à gauche. Soit I une petite catégorie. Soit $X : I \rightarrow C$, un foncteur. On suppose que X admet une colimite, alors le morphisme

$$F \circ X \rightarrow F \circ \delta_I(\mathrm{colim}_I X) \cong \delta_I F(\mathrm{colim}_I X)$$

fait de $F(\mathrm{colim}_I X)$ la colimite du diagramme $F \circ X$.

De même si $F : C \rightarrow D$ est un adjoint à droite et si X admet une limite, alors l'application évidente

$$\delta_I F(\mathrm{lim}_I X) \cong F \circ (\delta_I \mathrm{lim}_I X) \rightarrow F \circ X$$

fait de $F(\mathrm{lim}_I X)$ la limite du diagramme $F \circ X$.

On peut résumer ce théorème informellement par le slogan "un adjoint à gauche préserve les colimites et un adjoint à droite préserve les limites".

Proof. On traite le cas des limites, l'autre cas se traite dualement. Il s'agit de montrer que $F(\lim_I X)$ représente le bon foncteur. On note $L : D \rightarrow C$ l'adjoint à gauche de F . On note également $\tilde{F} : \text{Fun}(I, C) \rightarrow \text{Fun}(I, D)$ le foncteur de postcomposition par F et $\tilde{L} : \text{Fun}(I, D) \rightarrow \text{Fun}(I, C)$ le foncteur de postcomposition par L . On a une structure d'adjonction sur ces deux foncteurs déduite de l'adjonction entre L et F

On a une suite d'isomorphisme de foncteurs $D^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ens}$.

$$\begin{aligned} \text{Hom}_D(-, F(\lim_I X)) &\cong \text{Hom}_C(L(-), \lim_I X) \\ &\cong \text{Hom}_{\text{Fun}(I, C)}(\delta_I L(-), X) \\ &\cong \text{Hom}_{\text{Fun}(I, C)}(\tilde{L}(\delta_I(-)), X) \\ &\cong \text{Hom}_{\text{Fun}(I, D)}(\delta_I(-), \tilde{F}(X)) \\ &\cong \text{Hom}_D(-, \lim_I F \circ X) \end{aligned}$$

□

On peut aussi poser la définition suivante.

Définition 42. Soit I une petite catégorie et C une catégorie. Si le foncteur $\delta_I : C \rightarrow \text{Fun}(I, C)$ possède un adjoint à gauche (resp. à droite), on notera cet adjoint colim_I (resp. \lim_I) et on l'appellera le foncteur de I -colimite (resp. I -limite).

Cette définition n'est pas abusive grâce à la proposition suivante.

Proposition 43. Si $X : I \rightarrow C$ est un foncteur, la counité de l'adjonction $(\text{colim}_I, \delta_I)$ en X nous donne un morphisme $X \rightarrow \delta_I(\text{colim}_I X)$ qui fait de $\text{colim}_I X$ la colimite de X . Dualement l'unité de l'adjonction (δ_I, \lim_I) en X donne un morphisme $\delta_I(\lim_I X) \rightarrow X$ qui fait de $\lim_I X$ la limite de X .

Proof. Vérification immédiate. □

7. EXEMPLES DE LIMITES ET COLIMITES

Étant donné un ensemble U , on peut considérer U comme une catégorie dont l'ensemble des objets est U et dont les seuls morphismes sont les identités. Un U -diagramme dans une catégorie C est simplement la donnée d'une famille d'objets de C indexée par U .

Définition 44. Soit $X : U \rightarrow C$ un U -diagramme dans C , sa limite lorsque elle existe est appelée le produit des objets $\{X(u)\}_{u \in U}$ et sa colimite est appelée le coproduit des objets $\{X(u)\}_{u \in U}$.

Explicitons ce qu'est le coproduit d'une famille $\{X(u)\}_{u \in U}$ d'objets de C . Il s'agit d'un objet Y de C avec la donnée de morphismes $i_u : X_u \rightarrow Y$ pour tout u qui satisfaisant la propriété universelle suivante :

Pour tout Z dans C et toute familles de morphismes $j_u : X_u \rightarrow Z$, il existe un unique morphisme $f : Y \rightarrow Z$ tel que $f \circ i_u = j_u$ pour tout u . On laisse au lecteur le soin de se convaincre que cette définition est bien équivalente à celle de la section précédente . De même on laisse le soin au lecteur de formuler explicitement ce qu'est le produit de la famille $\{X(u)\}_{u \in U}$.

Exemple 45. Donnons quelques exemples de produits et de coproduits.

- Dans la catégorie des ensemble, le produit des objets $\{X(u)\}_{u \in U}$ est simplement l'ensemble produit $\prod_u X(u)$. Le coproduit des objets $\{X(u)\}_{u \in U}$ est l'union disjointe $\bigsqcup_u X(u)$.
- Dans la catégorie des groupes abéliens, le produit des objets $\{X(u)\}_{u \in U}$ est le produit des groupes abéliens et le coproduit des objets $\{X(u)\}_{u \in U}$ est la somme directe $\bigoplus_{u \in U} X(u)$.
- Dans la catégorie \mathbf{Top} le produit d'une famille $\{X(u)\}_{u \in U}$ est simplement le produit ensembliste muni de la topologie produit. Le coproduit d'une famille $\{X(u)\}_{u \in U}$ est le coproduit ensembliste $\sqcup_{u \in U} X(u)$ muni de la topologie dans laquelle un sous ensemble est un ouvert si son intersection avec chacun des $X(u)$ est ouverte.

On note P l'ensemble partiellement ordonné des sous-ensembles stricts de $\{0, 1\}$. On vérifie sans peine qu'un foncteur F de P dans une catégorie C est la donnée d'un diagramme de la forme suivante

$$\begin{array}{ccc} X_\emptyset & \longrightarrow & X_0 \\ \downarrow & & \\ X_1 & & \end{array}$$

De même un foncteur $P^{\text{op}} \rightarrow C$ est la donnée d'un diagramme de la forme suivante

$$\begin{array}{ccc} & & X_0 \\ & & \downarrow \\ X_1 & \longrightarrow & X_\emptyset \end{array}$$

Définition 46. Soit C une catégorie, $X : P \rightarrow C$ un foncteur, la colimite d'un P -diagramme dans C est appelée somme amalgamée du diagramme. De même la limite d'un P^{op} -diagramme dans C est appelée produit fibré.

Explicitons la notion de somme amalgamée. Si on se donne

$$\begin{array}{ccc} X_\emptyset & \longrightarrow & X_0 \\ \downarrow & & \\ X_1 & & \end{array}$$

un diagramme dans C , sa colimite est un objet Y de C avec des morphismes $i_0 : X_0 \rightarrow Y$ et $i_1 : X_1 \rightarrow Y$ qui rendent commutatifs le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} X_\emptyset & \longrightarrow & X_0 \\ \downarrow & & \downarrow i_0 \\ X_1 & \xrightarrow{i_1} & Y \end{array}$$

et satisfaisant la condition universelle suivante :

Pour tout objet Z de C et tous morphismes $j_0 : X_0 \rightarrow Z$ et $j_1 : X_1 \rightarrow Z$ tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X_\emptyset & \longrightarrow & X_0 \\ \downarrow & & \downarrow j_0 \\ X_1 & \xrightarrow{j_1} & Z \end{array}$$

commute, il existe un unique morphisme $f : Y \rightarrow Z$ tel que $f \circ i_0 = j_0$ et $f \circ i_1 = j_1$.

La notion de produit fibré peut s'expliquer de manière analogue (il faut simplement renverser le sens de toutes les flèches, voir Remarque 40).

Exemple 47. Donnons quelques exemples de sommes amalgamées et de produits fibrés.

- Soit

$$\begin{array}{ccc} X_\emptyset & \longrightarrow & X_0 \\ \downarrow & & \\ X_1 & & \end{array}$$

un P -diagramme dans \mathbf{Ens} , alors sa somme amalgamée existe et est donnée par l'ensemble quotient $(X_0 \sqcup X_1) / \simeq$ où \simeq est la relation d'équivalence la plus fine qui identifie un point x_0 de X_0 avec un point x_1 de X_1 s'il existe un point de X_\emptyset dont l'image dans X_0 est x_0 et l'image dans X_1 est x_1 .

- Soit

$$\begin{array}{ccc} & & X_0 \\ & & \downarrow \\ X_1 & \longrightarrow & X_\emptyset \end{array}$$

un P^{op} -diagramme dans la catégorie **Ens**. Le produit fibré de ce diagramme existe et est donné par le sous-ensemble de $X_0 \times X_1$ contenant les paires (x_0, x_1) ayant la même image dans X_\emptyset .

- Si dans l'exemple précédent les trois ensemble X_0 , X_1 et X_\emptyset ont une structure de groupe (resp. groupe abélien, resp. k -module, resp. anneau), alors le produit fibré ensembliste est naturellement muni de la même structure et définit le produit fibré dans **Grp** (resp. **Ab**, **Mod $_k$** , **An**). Ce n'est pas très suprenant, en effet on rappelle que dans chaque cas le foncteur oubli est un adjoint à droite, cela implique que les limites dans **Grp** (resp. **Ab**, **Mod $_k$** , **An**) ont pour ensemble sous-jacent la limite correspondante dans **Ens**.
- Soit

$$\begin{array}{ccc} X_\emptyset & \xrightarrow{i_0} & X_0 \\ i_1 \downarrow & & \\ & & X_1 \end{array}$$

un P -diagramme dans **Ab**, alors sa somme amalgamée existe et est donnée par le groupe abélien quotient $(X_0 \oplus X_1)/\text{im}(X_\emptyset)$ où $\text{im}(X_\emptyset)$ désigne l'image du morphisme de groupe abéliens

$$\begin{aligned} X_\emptyset &\rightarrow X_0 \oplus X_1 \\ x &\mapsto i_0(x) + i_1(x) \end{aligned}$$

La somme amalgamée dans **Mod $_k$** se calcule par la même construction.